情報数理シリーズ

A-2

差分学入門

情報化時代の微積分学

広田良吾著

培風館

「情報数理シリーズ」企画委員会

『情報数理シリーズ』発刊にあたって

近年の情報化社会の進展は目覚しいものがあり，21 世紀がいわゆる「情報」の時代であることは言をまたない．特に，我が国は各種の資源をもたず，知識集約的な産業をその主体とせざるをえない．このためには，時代の変化に柔軟に対応でき，創造力に富む情報分野の人材の育成が急務である．

書店には，各種のソフトウェアを利用するための解説書が数多く並んでいる．特に，Windows 95 の出現以降，この傾向は増す一方である．しかし，これらのほとんどは欧米諸国で開発されたものであり，真の知識集約的産業国家を形成するには，欧米諸国で開発されたソフトウェアを使いこなすだけでは不十分である．基本ソフトウェアから高度な応用ソフトウェアまでを創り出していく必要がある．

一方，情報に関する教育は理工系の各学科で広く開講されている．しかし，その講義用テキストは，情報処理技術やプログラミング言語の修得を目的としたものが多く，必ずしも情報教育に必須の基礎とその応用を含めた本来あるべき講義内容を指向したものとはなっていないのが実情といえる．本シリーズは，電気・電子・通信・情報・経営の各系など広い意味で情報関連の学部生・大学院生，情報関連企業の技術者・研究者を対象としている．情報教育の講義内容を情報数理の面からとらえ，また，学部と大学院のカリキュラムの連携を考慮している．これらを反映し，本シリーズは次のような視点から構成した．

1. 基礎・基礎と応用・入門の三つのグループに大別する．
2. セメスタ制にあわせた簡単な記述とし，現行および将来のカリキュラムと対応づけたものとする．
3. 基礎理論と先端的な応用技術とのバランスをとる．

なお，本シリーズは主として早稲田大学大学院理工学研究科で情報関係の講義を担当している教員を執筆陣としている．専攻によらず，情報分野を横断的にとらえており，必ずしも体系的・網羅的な構成を目指したものではないことをお断りしておきたい．

最後に，本シリーズをまとめるにあたっては，企画の当初から（株）培風館の児玉 晴男，木村 博信両氏のご尽力をいただいた．ここに，心より感謝する．

平成 8 年 3 月　　　　企画委員会

まえがき

ニュートン・ライプニッツに始まる微積分学の偉大な成果をコンピュータに利用しようとする時に現れる困難の第一は，コンピュータは無限小・無限大を知らないということである。このため，大学の 1，2 年で勉強した解析学の知識のほとんどが無駄になっている。『情報科学を勉強する学生に解析学はいらない，コンピュータ用の離散数学（discrete-math）だけを勉強すればよいのだ』といった声もあるが，それは行き過ぎだと思う。コンピュータの時代だからデジタル量だけを理解すればよいというのはアサハカな認識である。デジタル量（自然数・整数・有理数）の背後に実数があり，実数の背後に複素数がある。複素関数の正則性を通して整数のもつ深い意味が理解されたりする。このような認識なしでは離散数学の発展もありえない。

数値計算のための差分スキーム・組合わせ理論・社会科学のためのやさしい差分学の本などは多いが，微積分学と離散数学をスムーズに橋渡しする差分学の教科書が情報科学の学生のためにどうしても必要である。

第 1 章**微分より差分へ**のテーマは，微分公式 $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ は差分化するとどうなるか？　である。

第 2 章**差分商**の中心テーマは，微分学の難所であるテーラー展開の公式は差分学の目で眺めるとどう見えるか？　である。

第 3 章**補間法** (点と点の間を推定する) は，クイズをどう解くか？　である。

第 4 章**ライプニッツ則の応用**では，有用な関係式・漸化式は「関数の積の差分に対するライプニッツ則から生まれる」ことを示す。

第 5 章**差分方程式**の中心テーマは，「微分方程式の解法から差分方程式の解法へ」である。両者はよく似ているが違うところもある。

巻末の C **一般化スターリング数**，D **解答** は現在早稲田大学大学院修士 1 年鈴森康弘君の結果である。

培風館から情報数理シリーズの一つとして『差分学入門　情報化時代の微積分学』を執筆する機会を与えられたことを感謝する。

1997年9月

広田良吾

目　　次

1
微分より差分へ

微分公式

$$\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

は差分ではどうなるのか？

1.1　差　　分

微分演算はただ一つ $\dfrac{df}{dx}$ で定義すればよいが，微分に相当する差分演算にはいろいろな種類がある。関数 $f(x)$ に作用する主な演算子 (operator) は次の，前進差分演算子 (advanced or forward difference operator)，後退差分演算子 (backward or retarded difference operator)，中心差分演算子 (central difference operator) の三つである。これらの演算子はどれも等間隔点上の関数 $f(x)$ で (図 1.2)，次のように定義されている。

$$\Delta_{+x}f(x) = \{f(x+\epsilon) - f(x)\}/\epsilon \tag{1.1}$$

$$\Delta_{-x}f(x) = \{f(x) - f(x-\epsilon)\}/\epsilon \tag{1.2}$$

$$\Delta_{x}f(x) = \{f(x+\epsilon/2) - f(x-\epsilon/2)\}/\epsilon \tag{1.3}$$

ここで ϵ は差分間隔である。これらの演算子は全部 $\epsilon \to 0$ の極限で微分演算子 $\dfrac{df}{dx}$ に一致する。前進差分 $\Delta_{+x}f(x)$ は図 1.3のように等差分点 x と $x+\epsilon$ における関数 $f(x)$ の傾きを表している。前進差分演算子と後退差分演算子は ϵ を $-\epsilon$ に置き換えると相互に移り変わる。

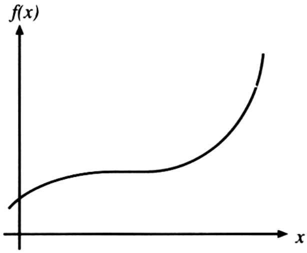


図 **1.1** x の連続関数 $f(x)$

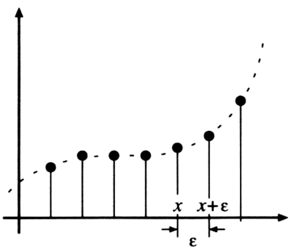


図 **1.2** $f(x)$ を点列 $n\epsilon$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ でサンプリングしたもの

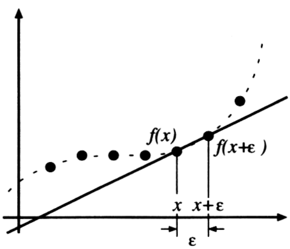


図 **1.3** $\Delta_{+x}f(x)$ は点 $f(x+\epsilon)$ と点 $f(x)$ を結ぶ直線の傾きを表している。

微分では一つの演算子ですむのが，差分ではこのように多くの演算子が必要になる。これが差分学の発達を遅らせた理由の一つでもあるが，よく考えてみると現実の世界における時間・空間の働きが異なっているのでべつべつの演算子が必要になるのは当然かもしれない。

前進差分は将来の時間発展を予測するのに必要である。中心差分はわれわれの住んでいる空間が左右対称であるので，空間の差分を考えるときに適している。後退差分は過去のデータを処理するときに必要である。たとえばランダムなノイズを処理して $1/f$ ゆらぎを生成するときに使う[1]。

ノート　微分と差分の違い

$f(x)$ が x の連続関数のとき導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ がつねに存在するとは限らないが，差分はつねに存在する。たとえば，x の絶対値 $|x|$ の点 $x=0$ における微分の値は

$$\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|0|}{h}=1, \tag{1.4}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|-h|-|0|}{-h}=-1 \tag{1.5}$$

となり，左極限と右極限が一致しないので導関数は存在しない。しかし差分はつねに存在する。ただし存在はするが，前進・後退・中心差分の値はそれぞれ異なる。

$$\Delta_{+x}|x| = \{|\epsilon|-|0|)\}/\epsilon \tag{1.6}$$
$$= 1 \tag{1.7}$$
$$\Delta_{-x}|x| = \{|0|-|-\epsilon|\}/\epsilon \tag{1.8}$$
$$= -1 \tag{1.9}$$
$$\Delta_{x}|x| = \{|\epsilon/2|-|-\epsilon/2|\}/\epsilon \tag{1.10}$$
$$= 0 \tag{1.11}$$

□

$x=n\epsilon$ (n は自然数) とおくと

$$\Delta_{+x}f(x) = \{f(x+\epsilon)-f(x)\}/\epsilon \tag{1.12}$$
$$= \{f((n+1)\epsilon)-f(n\epsilon)\}/\epsilon \tag{1.13}$$
$$= \{\hat{f}(n+1)-\hat{f}(n)\}/\epsilon \tag{1.14}$$

したがって，前進・後退差分演算子 Δ_{+n}・Δ_{-n}

$$\Delta_{+n}f_n = f_{n+1}-f_n, \tag{1.15}$$

$$\Delta_{-n}f_n = f_n-f_{n-1} \tag{1.16}$$

---

[1] 広田良吾 “差分学のすすめ”, 応用数理 Vol.3 MARCH (1993) p.48。

を使い，関数 $f(x)$ と $\hat{f}_n$ を同一視すると

$$\epsilon\Delta_{+x}f(x) = \Delta_{+n}f_n, \tag{1.17}$$

$$\epsilon\Delta_{-x}f(x) = \Delta_{-n}f_n \tag{1.18}$$

である。

注 差分 Δ_{+n} の代わりに Δ_{+x} を使うのは $\lim_{\epsilon\to 0}$ の極限である微分との対応を意識しているときである。 □

1.2 和 と 積

関数 $f(x)$ の x による積分 $\int f(x)\,dx$ に対応する差分演算を和分 (Sum) とよぶ。数列 $\{f_n\}$ のインデックス n について 1 から N までの和

$$f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_N \tag{1.19}$$

を

$$\sum_{n=1}^{N} f_n \tag{1.20}$$

と書き表す。これをシグマ記号とよぶ。$\sum$ はギリシャ文字シグマ (σ) の大文字である。また，$\sum$ の下に n に対する条件を書いて上の数列の和を

$$\sum_{1\le n\le N} f_n \tag{1.21}$$

のようにも表示する。

数列 $\{f_n\}$ のインデックス n について 1 から N までの積

$$f_1 f_2 f_3 \cdots f_N \tag{1.22}$$

を

$$\prod_{n=1}^{N} f_n \qquad \text{または} \qquad \prod_{1\le n\le N} f_n \tag{1.23}$$

と書き表す。$\prod$ はギリシャ文字パイ (π) の大文字である。

数列 $\{f\}$ のインデックスが二つ以上ある場合，たとえば二つのインデックス j と k についてそれぞれ 1 から N までの和をとる場合を次のように書き表す。

$$\sum_{1\leq j,k\leq N} f_{jk} \tag{1.24}$$

これを多重和という。また二つのインデックス j と k についてそれぞれ 1 から N までの積をとる場合を次のように書き表す。

$$\prod_{1\leq j,k\leq N} f_{jk} \tag{1.25}$$

これを多重積という。

次の表現

$$\sum_{1\leq j<k\leq N} f_{jk} \tag{1.26}$$

では，インデックス j と k はそれぞれ 1 から N まで動けるが，実際に和をとるのは (条件式 $j<k$ のために) k の値が j より大きい場合のみである。したがって，この多重和の項の数は式 (1.24) の項の数とは違っている (式 (1.24) の方が条件がない分だけ項数は多い)。

差分間隔を ϵ とするとき，x の関数 $f(x), x=n\epsilon$ の n についての 1 から N までの和

$$f(\epsilon)+f(2\epsilon)+f(3\epsilon)+\cdots+f(N\epsilon) \tag{1.27}$$

を ϵ 倍したもの

$$\sum_{n=1}^{N} \epsilon f(n\epsilon) \tag{1.28}$$

は $\lim\limits_{\epsilon\to 0}$ で極限が存在するとき $f(x)$ の定積分

$$\int_0^a f(x)dx \tag{1.29}$$

になる。ここで $N\epsilon=a$ である。

演習問題 1 次の和の公式

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=c_1\left(1-\frac{1}{N+1}\right)$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=c_2\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=c_3\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right)$

の比例係数 c_1, c_2, c_3 を $N=3$ について求めよ (左辺と右辺を電卓で計算して推定せよ)。

注　上の公式の一般形は後で示す (式 (1.126))。

演習問題 2　次の等式を $n=4$ について，和 $\sum$ の記号を使わないで表示せよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j}=\frac{2n}{n+1}$$

演習問題 3　$k=1, n=3$ のとき次の等式を示せ。

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=i}^{n} f_{ij}=\sum_{j=k}^{n}\sum_{i=k}^{j} f_{ij}$$

演習問題 4　次の等式を $n=2$ のときに示せ。

$$\sum_{0\le i\le j\le n}\ \sum_{i\le k\le j} f_{ijk}=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=k}^{n} f_{ijk}$$

演習問題 5　次の等式を $m=2$ について，和 $\sum$，積 $\prod$ の記号を使わないで表示せよ。

$$1+\sum_{n=0}^{m}\prod_{s=0}^{n}\frac{(x_{m+1}-x_s)}{(x_0-x_{s+1})}=0$$

注　この等式を任意の m についてエレガントに証明するのはやさしくない。

演習問題 6　次の等式を $n=2$ について，和 $\sum$ の記号を使わないで表示せよ。

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{\sum_{i=0}^{k} g(i)P(i,k)\right\}\left\{\sum_{j=k}^{n} h(j)Q(j,k)\right\}$$

$$=\sum_{0\le i\le j\le n} g(i)h(j)\left\{\sum_{i\le k\le j} P(i,k)Q(j,k)\right\}$$

演習問題 7　次の和表現式を $n=3$ の場合に書き下し，どの式とどの式が等しいかを示せ。

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} f_{ij}$　　2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}$

3. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} f_{ij}$　　4. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} f_{ij}$

5. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} f_{ij}$　　6. $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} f_{ij}$

7. $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n} f_{ij}$　　8. $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n} f_{ij}$

1.3　差分と和分

関数 $f(x)$ の x による積分

$$\int_0^x f(x')\,dx' \tag{1.30}$$

を x で微分する

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x')\,dx' \tag{1.31}$$

と元の関数 $f(x)$ に戻る。

これと同じ性質が差分にもある。和分

$$\sum_{n'=0}^{n} f_{n'} \tag{1.32}$$

を n で後退差分すると

$$\Delta_{-n}\sum_{n'=0}^{n} f_{n'} = \Delta_{-n}(f_0+f_1+\cdots+f_{n-1}+f_n) \tag{1.33}$$

$$= (f_0+f_1+\cdots+f_n)-(f_0+f_1+\cdots+f_{n-1}) \tag{1.34}$$

$$= f_n \tag{1.35}$$

となる。同じ和分式 (1.32) を n で前進差分すると

$$\Delta_{+n}\sum_{n'=0}^{n} f_{n'} = \Delta_{+n}(f_0+f_1+\cdots+f_{n-1}+f_n) \tag{1.36}$$

$$= (f_0 + f_1 + \cdots + f_{n+1}) - (f_0 + f_1 + \cdots + f_n) \quad (1.37)$$

$$= f_{n+1} \quad (1.38)$$

となる。f_n ではなく，前進差分 Δ_{+n} のときは f_{n+1} になる。

演習問題 8 第 n 項 a_n が次式で与えられる数列 $\{a_n\}$ の和 $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$ を求めよ。

ヒント　$a_n = V(n+1) - V(n)$ となるような関数 $V(n)$ を見つける。

1. $a_n = n$
2. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
3. $a_n = n(n+1)$
4. $a_n = \dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

1.4 微分と差分，積分と和分

n 個の自然数の和 $S_n = 1+2+3+\cdots+n$ は

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (1.39)$$

と表現される。

注　ガウスの方法
この S_nを求める方法は大数学者ガウス (*Karl Gauβ*) が 9 歳のとき (1786 年) に発見したといわれている。彼は次のように計算した。

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \quad (1.40)$$

$$+ \quad S_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 \quad (1.41)$$

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) + (n+1) \quad (1.42)$$

$$S_n = \frac{1}{2}n(n+1) \quad (1.43)$$

S_n を逆順に並べ変えてもとの S_n に加えるところがミソである。
しかし，この方法は自然数の 2 乗の和

$$S_{n,2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 \quad (1.44)$$

の計算には使えない。後で説明する階乗べき関数の差分公式を使うと自然数の m 乗 (m は自然数) の和

$$S_{n,m} = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + (n-1)^m + n^m, \tag{1.45}$$

が計算できるようになる。 □

自然数の和 $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ を後退差分すると

$$\Delta_{-n} S_n = \Delta_{-n} \frac{1}{2} n(n+1) \tag{1.46}$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(n-1)n \tag{1.47}$$

$$= n \tag{1.48}$$

である。一方 x の積分 $I(x)$ は

$$I(x) \equiv \int_0^x x'\,dx' \tag{1.49}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tag{1.50}$$

となる。$I(x) = \frac{1}{2}x^2$ を微分すると

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}x^2 = x \tag{1.51}$$

である。微積分学では $x^m (m \neq -1)$ の積分を計算するために x のべき乗の微分公式

$$\frac{d}{dx}x^{m+1} = (m+1)x^m \tag{1.52}$$

を使って

$$\int_0^x (x')^m\,dx' = \int_0^x \frac{1}{m+1}\frac{d}{dx'}(x')^{m+1}\,dx' \tag{1.53}$$

$$= \frac{1}{m+1}x^{m+1} \tag{1.54}$$

を得る。積分を計算するのに微分公式を利用するのである。

さて，ある関数 $f(x)$ に対して $\Delta_{+x}V(x) = f(x)$ となるような関数 $V(x)$ が見つかったと仮定する。そのとき $f(x)$, $(x = n\epsilon)$ の和分は

$$\sum_{n=1}^{N} \epsilon f(x) = \sum_{n=1}^{N} \epsilon \Delta_{+x} V(x) \tag{1.55}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} V(x+\epsilon) - V(x) \tag{1.56}$$

$$= V(2\epsilon) - V(\epsilon) + \cdots + V((N+1)\epsilon) - V(N\epsilon) \tag{1.57}$$

$$= V((N+1)\epsilon) - V(\epsilon) \tag{1.58}$$

となり，$f(x)$ を和分した結果が x の関数 $V(x)$ で与えられる。$\epsilon = 1$ のときこの結果は

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = V(N+1) - V(1) \tag{1.59}$$

になる。ただし $f(n) = V(n+1) - V(n)$ である。この事実から自然数のべき乗の和の計算にべき乗の差分公式を利用することを思いつく。以下でべき乗の差分公式を調べてみる。

1.5 階乗べき関数

差分公式を創るためにまず x のべき乗の微分公式を復習する。

x のべき乗 x^m (m は整数) の微分公式は

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1} \tag{1.60}$$

である。この公式がどうして成り立っているかを $m = 0, 1, 2$ の場合に見てみる。微分の定義により，

$$\frac{dx^m}{dx} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{(x+\epsilon)^m - x^m}{\epsilon} \tag{1.61}$$

である。$m = 0$ のときは確かに

$$\frac{dx^0}{dx} = 0 \tag{1.62}$$

である。$m=1$ のときも確かに

$$\frac{dx}{dx}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon)-x}{\epsilon} \tag{1.63}$$
$$=1 \tag{1.64}$$

である。$m=2$ のときも確かに

$$\frac{dx^2}{dx}=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{(x+\epsilon)^2-x^2}{\epsilon} \tag{1.65}$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{2x\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon} \tag{1.66}$$
$$=2x \tag{1.67}$$

となって微分公式は $m=0,1,2$ で成立していることが確かめられた。

次に x^m を $m=0,1,2$ について差分してみる。前進差分の定義式を使う (ϵ を差分間隔として) 。$m=0,1,2$ のとき

$$\Delta_{+n}x^0=\frac{(x+\epsilon)^0-x^0}{\epsilon} \tag{1.68}$$
$$=0, \tag{1.69}$$

$$\Delta_{+n}x^1=\frac{(x+\epsilon)-x}{\epsilon} \tag{1.70}$$
$$=1, \tag{1.71}$$

$$\Delta_{+n}x^2=\frac{(x+\epsilon)^2-x^2}{\epsilon} \tag{1.72}$$
$$=2x+\epsilon \tag{1.73}$$

である。$m=0,1$ では微分公式 $\frac{dx^m}{dx}=mx^{m-1}$ と同じ差分公式

$$\Delta_{+n}x^m=mx^{m-1} \tag{1.74}$$

が成り立っているが，$m=2$ のときは

$$\Delta_{+n}x^2=2x+\epsilon \tag{1.75}$$

となって成り立たない。微分では極限操作 $\lim_{\epsilon\to 0}$ により最後の項 ϵ が消えるが，差分では残るのである。

同じことを後退差分で計算してみると，$m = 0, 1, 2$ のとき

$$\Delta_{-n} x^0 = 0, \tag{1.76}$$

$$\Delta_{-n} x^1 = 1, \tag{1.77}$$

$$\Delta_{-n} x^2 = \frac{x^2 - (x - \epsilon)^2}{\epsilon} \tag{1.78}$$

$$= 2x - \epsilon \tag{1.79}$$

となってどちらでも差分公式

$$\Delta_{\pm n} x^m = m x^{m-1} \tag{1.80}$$

は $m = 2$ で成立しない。

したがって“べき乗の微分公式に対応する差分公式はない”という否定的な結論になる。しかし，ここでやめては何の進歩もない。既成概念を捨てると差分公式は成立するのである。発想を逆転させて差分公式が成立するように x のべき乗 (たとえば x^2) の概念を創り変えるのである。自然数の和の公式でわかったことは関係式

$$\Delta_{-n} \frac{1}{2} n(n+1) = n \tag{1.81}$$

である。$x = n\epsilon$ とおくと，この式は

$$\Delta_{-x} \frac{1}{2} x(x+\epsilon) = x \tag{1.82}$$

と読み変えられる。したがって

$$\Delta_{-x} x(x+\epsilon) = 2x \tag{1.83}$$

である。x^2 の代わりに $x(x+\epsilon)$ を使うと差分公式が成り立ちそうである。$x(x+\epsilon)$ は $\lim_{\epsilon \to 0}$ のとき x^2 になるのでべき乗の概念の自然な拡張になっている。この考えを発展させて $\lim_{\epsilon \to 0}$ で x^m になるような新しいべき乗を探すと次の式

$$\Delta_{-x} \overbrace{x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)}^{3\text{ 個の因子}} = 3 \overbrace{x(x+\epsilon)}^{2\text{ 個の因子}} \tag{1.84}$$

$$\Delta_{-x} \overbrace{x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)(x+3\epsilon)}^{4\text{ 個の因子}} = 4 \overbrace{x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)}^{3\text{ 個の因子}} \tag{1.85}$$

$$\cdots$$

が得られる。新しいべき乗は式の表現が長くて書くのが面倒であるので，このべき乗を表現する新しい記号

$$x^{\overline{m}} \equiv 1, \qquad m = 0, \tag{1.86}$$

$$x^{\overline{m}} \equiv \overbrace{x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)\cdots(x+(m-1)\epsilon)}^{m\text{ 個の因子}}, \quad m > 0 \tag{1.87}$$

を導入する。$x^{\overline{m}}$ は x の m 次上昇階乗べきとよばれている。この記号によって微分公式

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1} \tag{1.88}$$

に対応して差分公式

$$\Delta_{-x}x^{\overline{m}} = mx^{\overline{m-1}} \tag{1.89}$$

が誕生する。

後退差分による公式 (1.89) は $\epsilon \to -\epsilon$ と置換すると，前進差分による公式

$$\Delta_{+x}x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}} \tag{1.90}$$

が得られる，ここで $x^{\underline{m}}$ は x の m 次下降階乗べきとよばれ，次のように定義されている。

$$x^{\underline{m}} \equiv 1, \qquad m = 0, \tag{1.91}$$

$$x^{\underline{m}} \equiv \overbrace{x(x-\epsilon)(x-2\epsilon)\cdots(x-(m-1)\epsilon)}^{m\text{ 個の因子}}, \quad m > 0 \tag{1.92}$$

注　記号について

数学ではいろいろな記号 (言葉・文字) を使う。見慣れない記号が並んでいると，それだけで数学を勉強する気がなくなる。しかし記号は数学を語る言葉である。たとえば，ここで導入した記号 $x^{\overline{m}}$ なしには差分公式を簡潔でしかも正確に表現することは不可能である。記号に慣れるためにはその記号が生まれるまでの歴史を知り，その記号がどうしても必要であることを理解することが必要である。

著者もソリトン理論で新しい微分記号 $D_x^m f \cdot g$ を創ったが，この記号形式にたどりつくまでには，いろいろな表現形式を使ってみた。最終的には簡潔性，拡張性に優れた記号が生き残る。

記号 $x^{\overline{m}}$ は最近使われだした記号である。同じものを表現するのに普通は別の記号 $(x)_m$ が使われている。記号 $x^{\underline{m}}$ に対して別の記号 $x^{(m)}$ が使われている。このテキストでは簡潔性のために $x^{\overline{m}}$ を使う。オーバーラインとアンダーラインが上昇階乗べきと下降階乗べきに対応しているところが良い。□

差分公式 (1.89)

$$\Delta_{-x} x^{\overline{m}} = m x^{\overline{m-1}} \tag{1.93}$$

を $m=4$ まで計算したが，念のために公式 (1.89) の証明を任意の自然数 m について行う。

$$\Delta_{-x} x^{\overline{m}} = \epsilon^{-1}\{x^{\overline{m}} - (x-\epsilon)^{\overline{m}}\}, \quad m > 0 \tag{1.94}$$

$$= \epsilon^{-1}\{\underline{x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)\cdots(x+(m-2)\epsilon)}(x+(m-1)\epsilon)$$

$$-(x-\epsilon)\underline{x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)\cdots(x+(m-2)\epsilon)}\} \tag{1.95}$$

ここでアンダーラインの部分が等しいことに注意すると

$$= \epsilon^{-1} x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)\cdots(x+(m-2)\epsilon)\{(x+(m-1)\epsilon) - (x-\epsilon)\}$$

$$= mx(x+\epsilon)(x+2\epsilon)\cdots(x+(m-2)\epsilon) \tag{1.96}$$

$$= m x^{\overline{m-1}} \tag{1.97}$$

となる。 ■

記号 ■ は証明の終わりを意味する。

注 証明について
学生『その公式（定理）は正しいですか？』,『そうです』。『ではどうして証明をする必要があるのですか？』。人によって答は違うと思う。

1. 自分で数学を創造しようとする人には証明のための訓練が絶対に必要である。なぜなら自分が発見したと思っている定理は間違っている（証明が困難な場合）か，すでに発見されている（証明がやさしい場合）か，のどちらかである。
2. 定理の意味をより完全に理解したい人は（定理の必要条件とか十分条件がわかる場合があるので）証明を読む必要がある。
3. 定理を応用するのが目的で，定理自身の確かさに興味がない人は証明を読む必要はない。
4. 著者の場合は簡単な定理は証明をし，少し複雑な定理は数式処理を使って正しさを確認し，後でひまなときに証明をしている。 □

微分公式

$$\frac{d}{dx} x^m = m x^{m-1} \tag{1.98}$$

は m が正負どちらの整数でも成り立つ。x の負のべき乗は

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m} \tag{1.99}$$

と定義されている。階乗べき関数でも同じ性質をもっているだろうか？ 等式

$$x^{\overline{-m}} = \frac{1}{x^{\overline{m}}} \tag{1.100}$$

と仮定すると後退差分公式

$$\Delta_{-x} x^{\overline{-m}} = -m x^{\overline{-m-1}} \tag{1.101}$$

は

$$\Delta_{-x} \frac{1}{x^{\overline{m}}} = -m \frac{1}{x^{\overline{m+1}}} \tag{1.102}$$

となる。この公式は正しいだろうか？　試しに $m = 2$ の場合をチェックしてみる。

$$\Delta_{-x} \frac{1}{x^{\overline{2}}} = \Delta_{-x} \frac{1}{x(x+\epsilon)} \tag{1.103}$$

$$= \epsilon^{-1} \left\{ \frac{1}{x(x+\epsilon)} - \frac{1}{(x-\epsilon)x} \right\} \tag{1.104}$$

$$= -2 \frac{1}{(x-\epsilon)x(x+\epsilon)} \tag{1.105}$$

$$\neq -2 \frac{1}{x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)} \tag{1.106}$$

となって差分公式は正しくない。ではどうするか？ ここでも既成概念をすて

$$x^{\overline{-m}} \neq \frac{1}{x^{\overline{m}}} \tag{1.107}$$

とし，m が負のときにも差分公式が成立するように $x^{\overline{-m}}$ の定義をやり直す。

$$x^{\overline{-m}} \equiv \underbrace{\frac{1}{(x-\epsilon)(x-2\epsilon)\cdots(x-m\epsilon)}}_{m\text{ 個の因子}}, \quad m = 1, 2, 3, \cdots \tag{1.108}$$

と定義する。こうすると，たとえば $m = 2$ のとき

$$\Delta_{-x} x^{\overline{-2}} = \Delta_{-x} \frac{1}{(x-\epsilon)(x-2\epsilon)} \tag{1.109}$$

$$= \epsilon^{-1} \left\{ \frac{1}{(x-\epsilon)(x-2\epsilon)} - \frac{1}{(x-2\epsilon)(x-3\epsilon)} \right\} \tag{1.110}$$

$$= -2 \frac{1}{(x-\epsilon)(x-2\epsilon)(x-3\epsilon)} \tag{1.111}$$

$$= -2 x^{\overline{-3}} \tag{1.112}$$

となって差分公式が成立する。任意の自然数 m に対しても

$$\Delta_{-x}\frac{1}{x^{\overline{-m}}}=\Delta_{-x}\frac{1}{(x-\epsilon)(x-2\epsilon)\cdots(x-m\epsilon)} \tag{1.113}$$

$$=\epsilon^{-1}\left\{\frac{1}{(x-\epsilon)\underline{(x-2\epsilon)\cdots(x-(m-1)\epsilon)(x-m\epsilon)}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\underline{(x-2\epsilon)(x-3\epsilon)\cdots(x-m\epsilon)}(x-(m+1)\epsilon)}\right\} \tag{1.114}$$

アイダーラインのところが等しいので

$$=-m\frac{1}{(x-2\epsilon)(x-3\epsilon)\cdots(x-m\epsilon)}\left\{\frac{1}{(x-\epsilon)}-\frac{1}{(x-(m+1)\epsilon)}\right\}$$

$$=-m\frac{1}{(x-\epsilon)(x-2\epsilon)\cdots(x-(m-1)\epsilon)(x-m\epsilon)(x-(m+1)\epsilon)}$$

$$=-mx^{\overline{-m-1}} \tag{1.115}$$

となって確かに成立している。 ■

一方，前進差分に対する差分公式はϵ を$-\epsilon$ に置き換えると

$$\Delta_{+x}x^{\underline{-m}}=-mx^{\underline{-m-1}} \tag{1.116}$$

となり，負の下降階乗べきは次のように定義される ($m>0$ は自然数)。

$$x^{\underline{-m}}\equiv\underbrace{\frac{1}{(x+\epsilon)(x+2\epsilon)\cdots(x+m\epsilon)}}_{m\ \text{個の因子}} \tag{1.117}$$

x^m の差分化として階乗べき関数 $x^{\underline{m}}$ と $x^{\overline{m}}$ を導入したが，x のべき乗 $x^m(m=0,1,2,\cdots,n)$ には線形独立という性質がある。線形独立というのは，次式

$$c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots+c_nx^n \tag{1.118}$$

が常に (x のどんな値に対しても) 0 であるならば，定数 $c_m,(m=0,1,2,\cdots,n)$ は全部 0

$$c_0=0,\quad c_1=0,\quad c_2=0,\quad c_3=0\quad\cdots,\quad c_n=0 \tag{1.119}$$

であるという性質である。

証明　式

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots + c_n x^n = 0 \tag{1.120}$$

を考える。この式 (1.120) に $x=0$ を代入すると (x は任意であるので $x=0$ を選べる) $c_0 = 0$ となる。

次に式 (1.120) を x で微分すると

$$c_1 + c_2 2x + c_3 3x^2 + \cdots + c_n n x^{n-1} = 0 \tag{1.121}$$

となる。この式 (1.121) に $x=0$ を代入すると $c_1 = 0$ となる。さらに，式 (1.121) を微分して…，同じ手続きを繰り返すと，すべての係数 $c_m (m = 0, 1, 2, \cdots, n)$ は全部 0 になる。■

べき乗 x^m から階乗べき関数 $x^{\underline{m}}$ と $x^{\overline{m}}$ になっても線形独立という性質は失われない。すなわち

$$c_0 + c_1 x^{\underline{1}} + c_2 x^{\underline{2}} + c_3 x^{\underline{3}} + \cdots + c_n x^{\underline{n}} = 0 \tag{1.122}$$

または

$$c_0 + c_1 x^{\overline{1}} + c_2 x^{\overline{2}} + c_3 x^{\overline{3}} + \cdots + c_n x^{\overline{n}} = 0 \tag{1.123}$$

が常に成り立てば，定数 $c_m, (m = 0, 1, 2, \cdots, n)$ は全部 0 である。

演習問題 9　x のべき乗の積は x のべき乗になる。すなわち整数 m, n に対して

$$x^m x^n = x^{m+n} \tag{1.124}$$

である。この性質は階乗べき関数 $x^{\underline{m}}$ と $x^{\overline{m}}$ ではどうなるか？ たとえば $x^{\underline{m}} x^{\underline{n}} \neq x^{\underline{m+n}}$ と思えば例を一つ上げよ。

演習問題 10　階乗べき関数 $x^{\underline{m}}$ と $x^{\overline{m}}$ の線形独立性を証明せよ。

演習問題 11　$\Delta_{+n} V(n) = f(n)$ のとき成り立つ関係式

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = V(N+1) - V(1) \tag{1.125}$$

を利用して次の和の公式

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)$

$$3.\ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right)$$

を証明せよ。

ヒント　式 (1.116) と式 (1.117) で $\epsilon=1$ とおくと $x=n$ である。

注　これらの公式を一般化すると任意の自然数 m,N に対する次の公式になる。

$$\sum_{n=1}^{N}n^{\underline{-m-1}}=-\frac{1}{m}\left\{(N+1)^{\underline{-m}}-1^{\underline{-m}}\right\} \tag{1.126}$$

研究課題 1　階乗べき関数 $x^{\overline{-m}}$ はすでに述べたように，x の $-m$ 乗 (m は整数) のもつ基本的対称性

$$x^{-m}=\frac{1}{x^m} \tag{1.127}$$

を持たない。著者はソリトン理論の差分化の研究過程でこの基本的性質の必要性を感じ，中心差分演算による階乗べき関数 $x^{((m))}$ を定義した。このべき関数は差分公式

$$\Delta_x x^{((m))}=mx^{((m-1))} \tag{1.128}$$

を満たし，対称性

$$x^{((-m))}=\frac{1}{x^{((m))}} \tag{1.129}$$

も満足している。この階乗べき関数はどのように定義されているか？

ヒント　$x^{((1))}=x$ を仮定し，対称性と差分公式を上手く使うと $x^{((1))}\to x^{((-1))}\to x^{((-2))}\to x^{((2))}\to x^{((-2))}\cdots$ を得る。

1.6　ベルヌーイの多項式

x のべき乗の微分公式

$$\frac{d}{dx}x^m=mx^{m-1} \tag{1.130}$$

において右辺の mx^{m-1} を変えずに，左辺の微分を前進差分 Δ_{+x} に置き換え x のべき乗 x^m の代わりに x の m 次のある多項式 $B_m(x)$ を使うと，次の式

$$\Delta_{+x}B_m(x)=mx^{m-1} \tag{1.131}$$

が得られる。この多項式 $B_m(x)$ はベルヌーイ (Bernoulli) の多項式とよばれる。ベルヌーイの多項式を求める前に，まず次式

$$\Delta_{+x}V_m(x)=x^m \tag{1.132}$$

を満たす $m+1$ 次の多項式 $V_m(x)$ を計算する。式 (1.132) を微分すると式 (1.131) になるので，ベルヌーイの多項式 $B_m(x)$ は $V_m(x)$ の微分係数

$$\frac{d}{dx}V_m(x)=B_m(x) \tag{1.133}$$

で与えられる。

演習問題 12 式 (1.132) と式 (1.133) を使って $m=1,2,3$ について $V_m(x)$ と $B_m(x)$ を求めよ ($V_m(x)$ を $m+1$ の多項式と仮定し，式 (1.132) を満たすように多項式の係数を定め，式 (1.133) から $B_m(x)$ を求める)。さらに $\Delta_{+x}V(x)=f(x)$ のとき成り立つ関係式 (1.59)

$$\sum_{n=1}^{N}f(n)=V(N+1)-V(1)$$

を利用して n のべき乗の和の公式

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n=\frac{1}{2}N(N+1)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n^2=\frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}n^3=\frac{1}{4}N^2(N+1)^2$

を確かめよ。

1.7 $q-$ 差 分

x のべき乗の微分公式

$$\frac{d}{dx}x^m=mx^{m-1} \tag{1.134}$$

において左辺と右辺の x のべき乗 x^m と x^{m-1} を変えずに，左辺の微分を $q-$差分 $\delta_{q,x}$ に置き換え，整数 m の代わりに 新しい整数 $[m]_q$ を使うと，次の式

$$\delta_{q,x}x^m=[m]_q x^{m-1} \tag{1.135}$$

が得られる。ここで関数 $f(x)$ に作用する $q-$差分演算子 $\delta_{q,x}$ は次式

$$\delta_{q,x} f(x) \equiv \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} \tag{1.136}$$

で定義されている。ここで q は定数である。この $q-$差分は関数 $f(x)$ を等比間隔上の点 (図 1.4) で定義し，そこでの $f(x)$ の傾きを表している。

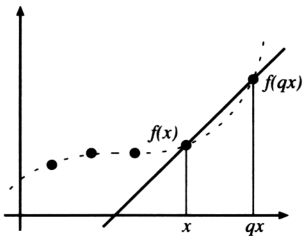


図 1.4 $f(x)$ を等比間隔点列 $q^n\epsilon$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ でサンプリングしたもの

演習問題 13 次の式を示せ。

$$\lim_{q\to 1} \delta_{q,x} f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

演習問題 14 式 (1.135) が成り立つように新しい整数 $[m]_q$ ($q-$integer とよばれている) を定義し，$\lim_{q\to 1}[m]_q = m$ を示せ。

注 この問題の意味は「$q-$差分の定義式を使って次の式

$$[m]_q = \frac{\delta_{q,x} x^m}{x^{m-1}}$$

を計算し，$\lim_{q\to 1}[m]_q = m$ を示せ。」である。

2

差 分 商

微積分学によると，x の関数 $f(x)$ が C_{n+1} 級 ($n+1$ 階微分可能) のとき $f(x)$ はテーラー級数に展開される。

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + R_n, \tag{2.1}$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x,$$

ここで R_n は剰余項である。この展開式は差分空間ではどうなるだろうか？　とくに，剰余項はどう表現されるのか……　？　一方，オイラーの等式とよばれる次のような恒等式がある。

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$$

こちらは完全な代数式である。一見すると二つの式には何の関係もないと思われるが実は深い関係がある。恒等式の左辺は x^n の 2 階微分 $\dfrac{d^2x^n}{dx^2}$ $(n = 0, 1, 2)$ を「不等間隔差分商」を使って差分化したものである。

テーラー展開式は「不等間隔差分商」を使って完全な代数化ができるのである。差分学の一つの目標は微分積分学の代数化である。

2.1 ニュートンの補間公式

推理クイズとして次の問題を考える。

問題 数列 $1, -1, 3, 25, 77, 171$ がデータとして与えられた。この数列に対して $f(0) = 1, f(1) = -1, f(2) = 3, \cdots, f(5) = 171$ となるような多項式 $f(x)$ を求めよ。

答 与えられたデータから次の差分表を作る。

差分表

x	$f(x)$	$\Delta_{+x} f(x)$	$\Delta_{+x}^2 f(x)$	$\Delta_{+x}^3 f(x)$	$\Delta_{+x}^4 f(x)$
0	1				
		-2			
1	-1		6		
		4		12	
2	3		18		0
		22		12	
3	25		30		0
		52		12	
4	77		42		
		94			
5	171				

この表より求める多項式は

$$f(x) = 1 - 2x + 6\frac{1}{2!}x(x-1) + 12\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2) \tag{2.2}$$

$$= 1 - x - 3x^2 + 2x^3 \tag{2.3}$$

となる。これが求める多項式である。

何をしているのかわからないと思うが，答をだす手順を推理せよ。同じような問題をもう一度出題する。

問題 (x, y) 平面上に 6 点 $(0,1), (1,3), (2,-1), (3,13), (4,45), (5,71)$ がデータとして与えられた。この 6 点を通る最小次の多項式 $f(x)$ を求めよ。

注 (x, y) 平面上の 6 点を通る多項式は高々5 次の多項式である。5 次の多項式の 6 個の係数を未知数として条件式から線形連立方程式が得られる。この式を解いて多項式が求められる $\cdots$ と思う人は実際に計算して答を出してみよ。

答 与えられたデータから次の差分表を作る。

差分表

x	$f(x)$	$\Delta_{+x}f(x)$	$\Delta^2_{+x}f(x)$	$\Delta^3_{+x}f(x)$	$\Delta^4_{+x}f(x)$	$\Delta^5_{+x}f(x)$
0	1					
		2				
1	3		-6			
		-4		24		
2	-1		18		-24	
		14		0		0
3	13		18		-24	
		32		-24		
4	45		-6			
		26				
5	71					

この表より求める多項式は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 + 2x - 6\frac{1}{2!}x(x-1) + 24\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2) \\
&\qquad -24\frac{1}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3) \\
&= 1 + 19x - 26x^2 + 10x^3 - x^4 \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

となる。これが求める多項式である。結果が正しいかどうかは $f(x)$ に数値 $x = 1, 2, \cdots, 5$ を代入すればすぐに判明する。

手順を推理して，次の演習問題を試してみよ。

演習問題 1 (x, y) 平面上に 6 点 $(0,1), (1,5), (2,6), (3,5), (4,3), (5,1)$ がデータとして与えられた。この 6 点を通る最小次の多項式 $f(x)$ を求めよ。

次の問題は少し複雑である。6 点の x 軸上の値が不規則である。

問題 (x, y) 平面上に 6 点 $(-1,-37), (2,14), (4,8), (5,2), (7,-1), (8,8)$ がデータとして与えられた。この 6 点を通る最小次の多項式 $f(x)$ を求めよ。

答 与えられたデータから，次の差分表を作る。

差分表

x	$f(x)$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}]$
-1	-37				
		17			
2	14		-4		
		-3		1/2	
4	8		-1		0
		-6		1/2	
5	2		3/2		0
		$-3/2$		1/2	
7	-1		7/2		
		9			
8	8				

この表より求める多項式は

$$f(x) = -37 + 17(x+1) - 4(x+1)(x-2) + \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-4) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{2}(-16 + 44x - 13x^2 - x^3) \tag{2.6}$$

となる。これが求める多項式である。

推理クイズの背後にあるのはニュートンの前進補間公式

$$f(x) = f(0) + x\Delta_{+x}f(0) + \frac{1}{2!}x(x-1)\Delta_{+x}^2 f(0)$$
$$+\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2)\Delta_{+x}^3 f(0) + \cdots \tag{2.7}$$

やニュートンの不等間隔差分商補間公式

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots \tag{2.8}$$

である。補間公式を理解するためにまず関数 $f(x)$ の高次前進差分$\Delta_{+x}^2 f(x)$,$\Delta_{+x}^3 f(x)$, $\cdots$ や高次不等間隔差分商 $f[x_0, x_1]$, $f[x_0, x_1, x_2], \cdots$ を勉強する。

2.2 高次差分

$f(x)$ の前進差分を

$$\Delta_{+x}f(x) = \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon} \tag{2.9}$$

と定義した。微分では $f(x)$ の導関数 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ がさらに導関数をもつとき，それを $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ または $f''(x)$ と表示し，第 2 次 (2 階) 導関数とよんだ。

差分でも 前進差分 $\Delta_{+x}f(x)$ の前進差分 $\Delta_{+x}[\Delta_{+x}f(x)]$ を $\Delta^2_{+x}f(x)$ と表示し，第 2 次 (2 階) 前進差分 (second forward difference) とよぶ。すなわち

$$\Delta^2_{+x}f(x) = \Delta_{+x}[\Delta_{+x}f(x)] \tag{2.10}$$

である。同様に第 3 次 (3 階) 前進差分 (third forward difference) を

$$\Delta^3_{+x}f(x) = \Delta_{+x}[\Delta^2_{+x}f(x)] \tag{2.11}$$

で定義する。一般に第 n 次 (n 階) 前進差分 (n-th forward difference) を

$$\Delta^n_{+x}f(x) = \Delta_{+x}[\Delta^{n-1}_{+x}f(x)] \tag{2.12}$$

で定義する。ただし

$$\Delta^0_{+x}f(x) = f(x) \tag{2.13}$$

である。

式 (2.10) の右辺を計算すると

$$\Delta^2_{+x}f(x) = \Delta_{+x}\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \tag{2.14}$$

$$= \epsilon^{-2}[f(x+2\epsilon) - 2f(x+\epsilon) + f(x)] \tag{2.15}$$

となる。式 (2.11) は

$$\Delta^3_{+x}f(x) = \epsilon^{-3}[f(x+3\epsilon) - 3f(x+2\epsilon) + 3f(x+\epsilon) - f(x)] \tag{2.16}$$

と表現される。一般の第 n 次 (n 階) 前進差分に対して式 (2.12) は

$$\Delta^n_{+x}f(x) = \epsilon^{-n}\left[f(x+n\epsilon) - nf(x+(n-1)\epsilon) + \frac{n(n-1)}{2!}f(x+(n-2)\epsilon)\right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}f(x+(n-3)\epsilon) + \cdots + (-1)^n f(x)\right] \tag{2.17}$$

$$= \epsilon^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(x+(n-k)\epsilon) \tag{2.18}$$

と表現される。ここで

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.19}$$

は 2 項係数である。2 項係数は次の展開式における $x^k y^{n-k}$ の係数として知られている。

$$(x+y)^n = \sum_{k_1+k_2=n} \frac{n!}{k_1!k_2!} x^{k_1} y^{k_2} \tag{2.20}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{2.21}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{2.22}$$

式 (2.18) の証明をする。最初の証明は数学的帰納法を使う。式 (2.18) は $n=1$ のとき確かに成立している。式 (2.18) が $n=n_1-1$ のとき成立する

$$\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x) = \epsilon^{-n_1+1} \sum_{k=0}^{n_1-1} (-1)^k \binom{n_1-1}{k} f(x+(n_1-1-k)\epsilon) \tag{2.23}$$

と仮定する。定義より

$$\begin{aligned}
\Delta_{+x}^{n_1} f(x) &= \Delta_{+x}\{\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x)\} \\
&= \Delta_{+x}\epsilon^{-n_1+1} \sum_{k=0}^{n_1-1} (-1)^k \binom{n_1-1}{k} f(x+(n_1-1-k)\epsilon) \\
&= \epsilon^{-n_1} \sum_{k=0}^{n_1-1} (-1)^k \binom{n_1-1}{k} \{f(x+(n_1-k)\epsilon) \\
&\qquad -f(x+(n_1-1-k)\epsilon)\}
\end{aligned}$$

である。ここで 2 番目の項に対する和の記号をシフトすると

$$\begin{aligned}
&= \epsilon^{-n_1} \left\{ \sum_{k=0}^{n_1-1} (-1)^k \binom{n_1-1}{k} f(x+(n_1-k)\epsilon) \right. \\
&\qquad \left. - \sum_{k=1}^{n_1} (-1)^{k-1} \binom{n_1-1}{k-1} f(x+(n_1-k)\epsilon) \right\} \\
&= \epsilon^{-n_1} \left\{ f(x+n\epsilon) + \sum_{k=1}^{n_1-1} (-1)^k \left(\binom{n_1-1}{k} + \binom{n_1-1}{k-1} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$f(x+(n_1-k)\epsilon)+f(x)\Bigg\}$$

となる。ここで 2 項係数の関係式

$$\binom{n_1-1}{k}+\binom{n_1-1}{k-1}=\binom{n_1}{k} \tag{2.24}$$

を使うと

$$=\epsilon^{-n_1}\sum_{k=0}^{n_1}(-1)^k\binom{n_1}{k}f(x+(n_1-k)\epsilon) \tag{2.25}$$

となって，式 (2.18) が $n=n_1$ のとき成立している。したがって，数学的帰納法により任意の n について，式 (2.18) が成り立つ。 ■

定理の構造が見えにくいので数学的帰納法による証明はできるだけ使わない方がよいと思っているので，次に式 (2.18) の別証を与える。

まず次の性質をもつシフト演算子 (shift operator) $E_{+x}, E_{+\frac{1}{2}x}, E_{-x}, E_{-\frac{1}{2}x}$ を定義する。

$$E_{+x}f(x)=f(x+\epsilon), \tag{2.26}$$

$$E_{+\frac{1}{2}x}f(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\epsilon\right), \tag{2.27}$$

$$E_{-x}f(x)=f(x-\epsilon), \tag{2.28}$$

$$E_{-\frac{1}{2}x}f(x)=f\left(x-\frac{1}{2}\epsilon\right) \tag{2.29}$$

シフト演算子の役割は $f(x)$ の独立変数 x を移す (シフトする) ことだけである。

任意の自然数 $n>1$ に対して

$$E_{+x}^nf(x)=E_{+x}\left[E_{+x}^{n-1}f(x)\right] \tag{2.30}$$

$$=f(x+n\epsilon), \tag{2.31}$$

$$E_{+\frac{1}{2}x}^nf(x)=E_{+\frac{1}{2}x}\left[E_{+\frac{1}{2}x}^{n-1}f(x)\right] \tag{2.32}$$

$$=f\left(x+\frac{1}{2}n\epsilon\right), \tag{2.33}$$

$$E_{-x}^nf(x)=E_{-x}\left[E_{-x}^{n-1}f(x)\right] \tag{2.34}$$

$$= f(x - n\epsilon), \tag{2.35}$$

$$E^n_{-\frac{1}{2}x} f(x) = E_{-\frac{1}{2}x}\left[E^{n-1}_{-\frac{1}{2}x} f(x)\right] \tag{2.36}$$

$$= f\left(x - \frac{1}{2}n\epsilon\right) \tag{2.37}$$

また任意の整数 m, n に対して

$$E^m_{+\frac{1}{2}x} E^n_{-\frac{1}{2}x} f(x) = f\left(x + \frac{1}{2}(m-n)\epsilon\right) \tag{2.38}$$

である。このシフト演算子を使うと前進，後退，中心演算子 $\Delta_{+x}, \Delta_{-x}, \Delta_x$ はそれぞれ

$$\Delta_{+x} = \epsilon^{-1}(E_{+x} - 1), \tag{2.39}$$

$$\Delta_{-x} = \epsilon^{-1}(1 - E_{-x}), \tag{2.40}$$

$$\Delta_x = \epsilon^{-1}\left(E_{+\frac{1}{2}x} - E_{-\frac{1}{2}x}\right) \tag{2.41}$$

と表される。この表示を使うと

$$\Delta^n_{+x} f(x) = \epsilon^{-n}(E_{+x} - 1)^n f(x) \tag{2.42}$$

である。2 項展開の式 (2.22) によって

$$= \epsilon^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k}_{+x} f(x) \tag{2.43}$$

$$= \epsilon^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x + (n-k)\epsilon) \tag{2.44}$$

となる。 ∎

この方法は以下で述べる後退，中心差分の表現式の証明にも適用できる。しかし，もっと大切なことは n が自然数でないとき (非整数階差分) にも使えることである。

同じように後退差分 $\Delta_{-x} f(x)$

$$\Delta_{-x} f(x) = \frac{f(x) - f(x - \epsilon)}{\epsilon} \tag{2.45}$$

に対して第 n 次 (n 階) 後退差分 (n−th backward difference) $\Delta_{-x}^{n} f(x)$ を

$$\Delta_{-x}^{n} f(x) = \Delta_{-x}[\Delta_{-x}^{n-1} f(x)], \qquad n > 1 \tag{2.46}$$

で定義する。このとき表現式は

$$\begin{aligned}\Delta_{-x}^{n} f(x) &= \epsilon^{-n}[f(x) - nf(x-\epsilon) + \frac{n(n-1)}{2!} f(x-2\epsilon) \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f(x-3\epsilon) + \cdots + (-1)^n f(x-n\epsilon)] \\ &= \epsilon^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x-k\epsilon)\end{aligned} \tag{2.47}$$

となる。前進差分 $\Delta_{+x}^{n} f(x)$ と後退差分 $\Delta_{-x}^{n} f(x)$ は ϵ を $-\epsilon$ に置き換えると互いに移り変わる。

中心差分 $\Delta_x f(x)$

$$\Delta_x f(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}\epsilon) - f(x-\frac{1}{2}\epsilon)}{\epsilon} \tag{2.48}$$

に対して第 n 次 (n 階) 中心差分 (n−th central difference) $\Delta_x^n f(x)$ を

$$\Delta_x^n f(x) = \Delta_x[\Delta_x^{n-1} f(x)], \qquad n > 1 \tag{2.49}$$

で定義する。このとき表現式は

$$\Delta_x^2 f(x) = \epsilon^{-2}[f(x+\epsilon) - 2f(x) + f(x-\epsilon)] \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^3 f(x) &= \epsilon^{-3}\left[f\left(x+\frac{3}{2}\epsilon\right) - 3f\left(x+\frac{1}{2}\epsilon\right)\right. \\ &\quad \left. +3f\left(x-\frac{1}{2}\epsilon\right) - f\left(x-\frac{3}{2}\epsilon\right)\right]\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\cdots$$

であり，一般の n では

$$\Delta_x^n f(x) = \epsilon^{-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f\left(x + \left(\frac{1}{2}n - k\right)\epsilon\right) \tag{2.52}$$

となる。中心差分 $\Delta_x^n f(x)$ は ϵ を $-\epsilon$ に置き換えても不変である。

演習問題 2 シフト演算子を使って前進，後退，中心差分を結ぶ関係式

$$\Delta_{+x}\Delta_{-x}f(x) = \Delta_x^2 f(x) \tag{2.53}$$

を示せ。

微分では x^m の n 階微分に対して次の微分則が成り立つ。

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} \tag{2.54}$$

階乗べき関数に対する差分公式

$$\Delta_{+x}x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}, \tag{2.55}$$

$$\Delta_{-x}x^{\overline{m}} = mx^{\overline{m-1}}, \tag{2.56}$$

$$\Delta_x x^{((m))} = mx^{((m-1))} \tag{2.57}$$

を使うと n 次差分公式

$$\Delta_{+x}^n x^{\underline{m}} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{\underline{m-n}}, \tag{2.58}$$

$$\Delta_{-x}^n x^{\overline{m}} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{\overline{m-n}}, \tag{2.59}$$

$$\Delta_x^n x^{((m))} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{((m-n))} \tag{2.60}$$

が成り立つ。

さて n 次多項式

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{2.61}$$

の係数 a_0 は $p_n(x)$ に $x=0$ を代入すると得られる。これを

$$a_0 = p_n(0) \tag{2.62}$$

と書く。次に $p_n(x)$ を x で微分すると

$$p_n'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} \tag{2.63}$$

となる。係数 a_1 はこの式に $x=0$ を代入すると得られる。これを

$$a_1 = p_n'(0) \tag{2.64}$$

と書く。同様にして係数 a_2 は

$$a_2 = \frac{1}{2}p_n''(0) \tag{2.65}$$

と表される。一般に係数 a_k は

$$a_k = \frac{1}{k!}p_n^{(k)}(0) \tag{2.66}$$

と表される。ここで $p_n^{(k)}(x)$ は $p_n(x)$ の k 階微分を表す。これらの結果を式 (2.61) に代入すると多項式 $p_n(x)$ の展開式

$$p_n(x) = p_n(0) + xp_n'(0) + \frac{1}{2!}x^2p_n''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}x^np_n^{(n)}(0) \tag{2.67}$$

が得られる。

蛇足 『この表現式は不思議な式である。左辺の p_n が右辺に現れている。自分を定義するのに自分自身を使っている。自己矛盾に陥らないのかなぁー』... 初めて，この式を見たときの著者の感想。

『x を時間と思う。$x > 0$ のときの $p_n(x)$ (将来の自分) は $x = 0$ における p_n の微分係数 (現在の自分の動向) によって決定される』 ... 現在の著者の感じ。 □

注 どんなに現在の動向 (p_n の高階微分係数) がわかったにせよ，それで未来 (有限の x における $p_n(x)$ の値) はわかるものではない。未来は不可知 (知ることができない) である。この式 (2.67) が正しいのは $p_n(x)$ が非常に単純な動きをする (x の高々 n 次多項式である) という仮定をしているからである。 □

n 次多項式 $p_n(x)$ の展開式 (2.67) の差分化を考える。微分のときと全く同じ手順で簡単に結果がだせる。たとえば前進差分による展開式として次式

$$p_n(x) = p_n(0) + x\Delta_{+x}p_n(0) + \frac{1}{2!}x^{\underline{2}}\Delta_{+x}^2p_n(0) + \ldots + \frac{1}{n!}x^{\underline{n}}\Delta_{+x}^np_n(0) \tag{2.68}$$

が成り立つ。

演習問題 3 n 次多項式 $p_n(x)$ を階乗べき関数 $x^{\underline{m}}$ で展開

$$p_n(x) = c_0 + c_1x^{\underline{1}} + c_2x^{\underline{2}} + c_3x^{\underline{3}} + \ldots + c_nx^{\underline{n}} \tag{2.69}$$

して式 (2.68) を導け。

2.3 ライプニッツの微分則

微分では関数の積に対するライプニッツ (Leibnitz) の微分則

$$\frac{d}{dx}gh = \frac{dg}{dx}h + g\frac{dh}{dx}, \tag{2.70}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}gh = \frac{d^2g}{dx^2}h + 2\frac{dg}{dx}\frac{dh}{dx} + g\frac{d^2h}{dx^2}, \tag{2.71}$$

$$\frac{d^3}{dx^3}gh = \frac{d^3g}{dx^3}h + 3\frac{d^2g}{dx^2}\frac{dh}{dx} + 3\frac{dg}{dx}\frac{d^2h}{dx^2} + g\frac{d^3h}{dx^3}, \tag{2.72}$$

$$\cdots \tag{2.73}$$

一般に

$$\frac{d^n}{dx^n}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}g(x)}{dx^{n-k}}\frac{d^k h(x)}{dx^k} \tag{2.74}$$

が成り立つ。証明は数学的帰納法を使う。式 (2.74) は $n = 1$ のとき確かに成立している。式 (2.74) が $n = n_1 - 1$ のとき成立する

$$\frac{d^{n_1-1}}{dx^{n_1-1}}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n_1-1}\binom{n_1-1}{k}\frac{d^{n_1-1-k}g(x)}{dx^{n_1-1-k}}\frac{d^k h(x)}{dx^k} \tag{2.75}$$

と仮定する。定義より

$$\frac{d^{n_1}}{dx^{n_1}}g(x)h(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^{n_1-1}}{dx^{n_1-1}}g(x)h(x) \tag{2.76}$$

$$= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n_1-1}\binom{n_1-1}{k}\frac{d^{n_1-1-k}g(x)}{dx^{n_1-1-k}}\frac{d^k h(x)}{dx^k} \tag{2.77}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_1-1}\binom{n_1-1}{k}\left\{\frac{d^{n_1-k}g(x)}{dx^{n_1-k}}\frac{d^k h(x)}{dx^k} + \frac{d^{n_1-1-k}g(x)}{dx^{n_1-1-k}}\frac{d^{k+1}h(x)}{dx^{k+1}}\right\} \tag{2.78}$$

である。ここで 2 番目の項に対する和の記号をシフトすると

$$= \sum_{k=0}^{n_1-1}\binom{n_1-1}{k}\frac{d^{n_1-k}g(x)}{dx^{n_1-k}}\frac{d^k h(x)}{dx^k}$$

$$+\sum_{k=1}^{n_1}\binom{n_1-1}{k-1}\frac{d^{n_1-k}g(x)}{dx^{n_1-k}}\frac{d^kh(x)}{dx^k} \tag{2.79}$$

$$= g(x)\frac{d^n}{dx^n}h(x)+\sum_{k=1}^{n_1-1}\left\{\binom{n_1-1}{k}+\binom{n_1-1}{k-1}\right\}\frac{d^{n_1-k}g(x)}{dx^{n_1-k}}\frac{d^kh(x)}{dx^k}$$

$$+\frac{d^{n_1}g(x)}{dx^{n_1}}h(x) \tag{2.80}$$

となる。2 項係数の関係式

$$\binom{n_1-1}{k-1}+\binom{n_1-1}{k}=\binom{n_1}{k} \tag{2.81}$$

より

$$=\sum_{k=0}^{n_1}\binom{n_1}{k}\frac{d^{n_1-k}g(x)}{dx^{n_1-k}}\frac{d^kh(x)}{dx^k} \tag{2.82}$$

となって式 (2.74) が $n=n_1$ のとき成立している。したがって，数学的帰納法により任意の n について式 (2.74) が成り立つ。 ■

式 (2.74) の別証を与える。微分演算子の性質

$$\frac{d}{dx}g(x)h(x)=\left(\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx'}\right)g(x)h(x')\bigg|_{x'=x} \tag{2.83}$$

$$=\left\{\frac{dg(x)}{dx}h(x')+g(x)\frac{dh(x')}{dx'}\right\}\bigg|_{x'=x} \tag{2.84}$$

$$=\frac{dg(x)}{dx}h(x)+g(x)\frac{dh(x)}{dx} \tag{2.85}$$

を使って証明する。

$$\frac{d^n}{dx^n}g(x)h(x)=\left(\frac{d}{dx}+\frac{d}{dx'}\right)^n g(x)h(x')\bigg|_{x'=x} \tag{2.86}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\frac{d^k}{dx'^k}g(x)h(x')\bigg|_{x'=x} \tag{2.87}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}g(x)}{dx^{n-k}}\frac{d^kh(x)}{dx^k} \tag{2.88}$$

となって証明された。 ■

蛇足 双線形演算子
著者が創った新しい記号 $D_x^n g \cdot h$ は，次のようにライプニッツの微分則とよく似た形式で定義される。

$$D_x^n g \cdot h \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{d^{n-k} g(x)}{dx^{n-k}} \frac{d^k h(x)}{dx^k} \tag{2.89}$$

ポイントは $(-1)^k$ がつくことであるが，このためライプニッツの微分則とは微分の性質がガラリと変わる。この演算子は双線形演算子 (bilinear operator) とよばれ，これを使うとソリトン方程式の双線形形式が簡潔に表現される。 □

関数の積に対するライプニッツの微分則は差分ではどうなるだろうか？
まず関数の積の前進差分を考える。微分公式 (2.70) より予想は

$$\Delta_{+x} g(x)h(x) = [\Delta_{+x} g(x)]h(x) + g(x)[\Delta_{+x} h(x)] \tag{2.90}$$

である。この式をチェックしてみる。左辺は

$$\Delta_{+x} g(x)h(x) \equiv \epsilon^{-1}[g(x+\epsilon)h(x+\epsilon) - g(x)h(x)] \tag{2.91}$$

である。右辺は

$$\begin{aligned} &[\Delta_{+x} g(x)]h(x) + g(x)[\Delta_{+x} h(x)] \\ &\equiv \epsilon^{-1}[g(x+\epsilon) - g(x)]h(x) + g(x)\epsilon^{-1}[h(x+\epsilon) - h(x)] \qquad (2.92) \\ &= \epsilon^{-1}[g(x+\epsilon)h(x) + g(x)h(x+\epsilon) - 2g(x)h(x)] \qquad (2.93) \end{aligned}$$

となって (左辺) $\neq$ (右辺) となり，式 (2.90) は正しくない。では微分公式 (2.70) の差分化をどうするか？ 第 1 章で微分公式

$$\frac{dx^m}{dx} = mx^{m-1} \tag{2.94}$$

の差分化として，次の五つ

1. 前進差分 Δ_{+x} と階乗べき関数 $x^{\underline{m}}$ を使って

$$\Delta_{+x} x^{\underline{m}} = m x^{\underline{m-1}} \tag{2.95}$$

とする。

2. 後退差分 Δ_{-x} と階乗べき関数 $x^{\overline{m}}$ を使って

$$\Delta_{-x}x^{\overline{m}} = mx^{\overline{m-1}} \tag{2.96}$$

3. 中心差分 Δ_x と階乗べき関数 $x^{((m))}$ を使って

$$\Delta_x x^{((m))} = mx^{((m-1))} \tag{2.97}$$

とする。

4. 前進差分 Δ_x とベルヌーイ多項式 $B_m(x)$ を使って

$$\Delta_{+x}B_m(x) = mx^{((m-1))} \tag{2.98}$$

とする。

5. q - 差分 $\delta_{q,x}$ と q - integer $[m]_q$ を使って

$$\delta_{q,x}x^m = [m]_q x^{m-1} \tag{2.99}$$

とする。

があった。

x のべき乗，たとえば x^3 は x^2 と x の積 x^2x であるので関数 $g(x)$ と $h(x)$ の積 $g(x)h(x)$ の微分と x のべき乗の微分とは密接な関係がある。しかし，x のべき乗の差分の一般化である関数の積の差分 (ライプニッツの公式) の研究は，それほど進んでいない。現在までによく知られているのは，左辺 $\Delta_{+x}g(x)h(x)$ を，そのままにして右辺の表示を変えたものである。左辺 $\Delta_{+x}g(x)h(x)$ を計算した結果は

$$\Delta_{+x}g(x)h(x) = \epsilon^{-1}[g(x+\epsilon)h(x+\epsilon) - g(x)h(x)] \tag{2.100}$$

であった。この式の右辺を計算してできるだけ式 (2.90) に近い形に変形すると

$$= \epsilon^{-1}\left\{[g(x+\epsilon) - g(x)]h(x+\epsilon) + g(x)[h(x+\epsilon) - h(x)]\right\} \tag{2.101}$$

$$= [\Delta_{+x}g(x)]h(x+\epsilon) + g(x)\Delta_{+x}h(x) \tag{2.102}$$

が得られる。最初の項が $[\Delta_{+x}g(x)]h(x)$ ではなく $[\Delta_{+x}g(x)]h(x+\epsilon)$ となって $h(x)$ の x が ϵ だけシフトされているところが予想と違っている。しかしどうして $h(x)$ だけが違うのだろうか？　左辺の $g(x)$ と $h(x)$ は入れ換えても変わ

らないのに，右辺では $h(x)$ だけがシフトされるのは理解できない。この点に注意して再計算すると

$$= \epsilon^{-1}\{[g(x+\epsilon) - g(x)]h(x) + g(x+\epsilon)[h(x+\epsilon) - h(x)] \tag{2.103}$$

$$= [\Delta_{+x} g(x)]h(x) + g(x+\epsilon)\Delta_{+x} h(x) \tag{2.104}$$

が得られる。今度は $g(x)$ だけがシフトされる。

$g(x)$ と $h(x)$ に対して対称な (入れ換えても不変な) 式は，$\Delta_{+x}h(x)$ の定義

$$\Delta_{+x} h(x) = \epsilon^{-1}[h(x+\epsilon) - h(x)] \tag{2.105}$$

より得られる関係式

$$h(x+\epsilon) = h(x) + \epsilon\Delta_{+x} h(x) \tag{2.106}$$

を使うと，式 (2.102) より

$$\Delta_{+x} g(x)h(x) = [\Delta_{+x} g(x)]h(x+\epsilon) + g(x)\Delta_{+x} h(x) \tag{2.107}$$

$$= [\Delta_{+x} g(x)]h(x) + g(x)\Delta_{+x} h(x) + \epsilon[\Delta_{+x} g(x)]\Delta_{+x} h(x) \tag{2.108}$$

となる。上式は確かに $g(x), h(x)$ に対して対称であり，$\lim_{\epsilon \to 0}$ の極限でライプニッツの微分則

$$\frac{d}{dx} g(x)h(x) = \frac{dg(x)}{dx} h(x) + g(x)\frac{dh(x)}{dx} \tag{2.109}$$

に一致するので，ライプニッツの微分則の一つの差分化になっている。しかし，表現の簡単さから，今後は $g(x), h(x)$ に対して非対称的である式

$$\Delta_{+x} g(x)h(x) = [\Delta_{+x} g(x)]h(x+\epsilon) + g(x)\Delta_{+x} h(x) \tag{2.110}$$

を使う。

この式全体に Δ_{+x} を演算すると

$$\Delta^2_{+x} g(x)h(x) = \Delta_{+x}\{[\Delta_{+x} g(x)]h(x+\epsilon) + g(x)\Delta_{+x} h(x)\} \tag{2.111}$$

である。ここで ($\Delta_{+x}g(x)$ を $g(x)$，$h(x+\epsilon)$ を $h(x)$ と読み変えて $\cdots$) 積の差分則 (2.110) を使うと

$$\Delta^2_{+x} g(x)h(x) = [\Delta^2_{+x} g(x)]h(x+2\epsilon) + 2[\Delta_{+x} g(x)]\Delta_{+x} h(x+\epsilon) + g(x)\Delta^2_{+x} h(x) \tag{2.112}$$

となる。同様にして

$$\Delta_{+x}^3 g(x)h(x) = [\Delta_{+x}^3 g(x)]h(x+3\epsilon) + 3[\Delta_{+x}^2 g(x)]h(x+2\epsilon) \\ +3[\Delta_{+x} g(x)]\Delta_{+x}^2 h(x+\epsilon) + g(x)\Delta_{+x}^3 h(x) \quad (2.113)$$

となる。これらの結果から一般形は

$$\Delta_{+x}^n g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\Delta_{+x}^{n-k} g(x)] \Delta_{+x}^k h(x+(n-k)\epsilon) \quad (2.114)$$

と推定される。右辺では $h(x)$ がシフトされている点だけが微分のライプニッツ則と違っている。

演習問題 4 数学的帰納法を使って差分のライプニッツ則 (2.114) を証明せよ。

次に式 (2.114) の別証を演算子を使って行う。まず前進差分演算子Δ_{+x} とシフト演算子 E_{+x} を使って式 (2.110) を表現する。

$$\Delta_{+x} g(x)h(x) = [\Delta_{+x} g(x)]h(x+\epsilon) + g(x)\Delta_{+x} h(x) \quad (2.115)$$

$$= [\Delta_{+x} E_{+x'} + \Delta_{+x'}] g(x)h(x')|_{x'=x} \quad (2.116)$$

したがって

$$\Delta_{+x}^n g(x)h(x) = [\Delta_{+x} E_{+x'} + \Delta_{+x'}]^n g(x)h(x')|_{x'=x} \quad (2.117)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\Delta_{+x}^{n-k}][E_{+x'}^{(n-k)} \Delta_{+x'}^k] g(x)h(x') \Bigg|_{x'=x} \quad (2.118)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\Delta_{+x}^{n-k} g(x)] \Delta_{+x}^k h(x+(n-k)\epsilon) \quad (2.119)$$

となって差分のライプニッツ則が証明された。 ■

研究課題 1 中心差分によるライプニッツ則はどうなるのだろうか？ 著者の結果は

$$\Delta_x g(x)h(x) = [\Delta_x g(x)][M_x h(x)] + [M_x g(x)][\Delta_x h(x)] \quad (2.120)$$

である。新しい演算子 $M_x f(x)$ を導入する必要がある。関係式（2.120）が成立するように演算子 $M_x f(x)$ を定義し，任意の自然数 n に対してライプニッツ則

$$\Delta_x^n g(x)h(x) = ? \quad (2.121)$$

を創り出せ。

2.4 不等間隔差分商

今まで関数 $f(x)$ に作用する差分演算子として，次の四つ

1. 前進差分演算子Δ_{+x}，定義は

$$\Delta_{+x}f(x) = \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} \tag{2.122}$$

2. 後退差分演算子Δ_{-x}，定義は

$$\Delta_{-x}f(x) = \frac{f(x)-f(x-\epsilon)}{\epsilon} \tag{2.123}$$

3. 中心差分演算子Δ_{x}，定義は

$$\Delta_{x}f(x) = \frac{f(x+\frac{1}{2}\epsilon)-f(x-\frac{1}{2}\epsilon)}{\epsilon} \tag{2.124}$$

4. q -差分演算子 $\delta_{q,x}$，定義は

$$\delta_{q,x}f(x) = \frac{f(x)-f(qx)}{x-qx} \tag{2.125}$$

を導入した。これらの差分演算子を統一し，拡張するために不等間隔差分商 (簡単には差分商 (difference quotient) という) を導入する。まず直線上に不等間隔に相異なる点 $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\cdots, x_{j+n}$ を選び，それぞれの点に対応する関数 $f(x)$ の値を $f(x_j), f(x_{j+1}), f(x_{j+2}), f(x_{j+3}), \cdots, f(x_{j+n})$ とする (図 2.1)。相異なる点を規準点 (または枢軸点または内点) とよぶ。ここで関数 $f(x)$ は必ずしも数式で定義される必要はない。たとえば，$f(x_j)$ は，単にデータ点の座標 x_j に対する縦座標 y_j として与えられているだけでよい。規準点の座標を $x_j, x_{j+1}, x_{j+2}\cdots, x_{j+n}$ とし，点はお互いに重なっていないとする。このとき，規準点における関数 $f(x)$ の 1 階差分商を

$$f[x_j, x_{j+1}] \equiv \frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j} \tag{2.126}$$

または，同じ式だが書く順序を変えて

$$f[x_j, x_{j+1}] \equiv \frac{f(x_j)-f(x_{j+1})}{x_j-x_{j+1}} \tag{2.127}$$

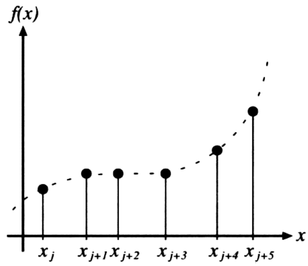


図 2.1　不等間隔点上の関数 $f(x)$

と定義する。これは 2 点 x_j, x_{j+1} における関数 $f(x)$ の傾きを表している。2 階差分商は，1 階差分商の勾配 (傾き) として

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] \equiv \frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j+1}, x_{j+2}]}{x_j - x_{j+2}} \tag{2.128}$$

と定義する。3 階差分商は 2 階差分商の勾配 (傾き) として

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] \equiv \frac{f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] - f[x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}]}{x_j - x_{j+3}} \tag{2.129}$$

と定義する。

一般に n 階差分商は二つの $n-1$ 階差分商の勾配 (傾き) として次のように定義される。

$$\begin{aligned} &f[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n}] \\ &= \frac{f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n-1}] - f[x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n}]}{x_j - x_{j+n}} \end{aligned} \tag{2.130}$$

n 階の差分商は，分子が二つの $n-1$ 階の差分商の差であり，分母は 2 点の差である。分子の二つの差分商 $f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, \cdots, x_{j+n-1}]$ と $f[x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, \cdots, x_{j+n-1}, x_{j+n}]$ は $n-1$ 個の点 $x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n-1}$ を共有している。残りの 2 点 x_j と x_{j+n} は二つの差分商の差を表すと同時に分母の 2 点を決めている。これらを不等間隔 (高階) 差分商という。

空間の均一性を捨てて (不等差分間隔のため) 差分をできるだけ一般化するのは良いが，一般的な理論構成が可能なのか？との疑問が生じる。しかし，この差分商の定義は奇跡とよんでよいくらい良くできている。例を挙げると

1. $f[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n}]$ は基準点 $x_j, x_{j+1}, x_{j+2} \cdots, x_{j+n}$ の順序によらない。どの二つの規準点を交換しても不変である。たとえば

   $f[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n}] = f[x_{j+n}, x_{j+1}, \cdots, x_j]$ である。

2. 関数の積の差分に対するライプニッツ則がある。このライプニッツ則から，いろいろな漸化式が生成される。

3. 不等間隔点上で定義された関数 $f(x_j), j = 0, 1, 2, \cdots, n$ を補間 (点と点の間を推定) する補間のアルゴリズムが生成される。

4. $n = 1, 2, 3, \cdots$ について恒等式

$$f(x) \equiv f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \cdots$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, x] \tag{2.131}$$

   が存在する。そしてこの式からテーラー展開式

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + R_n, \tag{2.132}$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \qquad x_0 < \xi < x, \tag{2.133}$$

   が導かれる。

次に不等間隔差分商のもつ奇跡的性質の第一

1. $f[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n}]$ は基準点 $x_j, x_{j+1}, x_{j+2} \cdots, x_{j+n}$ の順序によらない。どの二つの規準点を交換しても不変である。たとえば

   $f[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n}] = f[x_{j+n}, x_{j+1}, \cdots, x_j]$ である。

を示す。

$$f[x_j, x_{j+1}] = \frac{f(x_j) - f(x_{j+1})}{x_j - x_{j+1}} \tag{2.134}$$

より，

$$f[x_j, x_{j+1}] = f[x_{j+1}, x_j] \tag{2.135}$$

である。これは引き数 x_j, x_{j+1} を入れ換えても差分商の値は不変であることを示している。

2 階の差分商の定義を一見すると，引き数 x_j, x_{j+1}, x_{j+2} の順序を入れ換えると値が変わるように見える。詳しく計算してみる。

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f[x_j, x_{j+1}] - f[x_{j+1}, x_{j+2}]}{x_j - x_{j+2}} \tag{2.136}$$

$$= \frac{f(x_j) - f(x_{j+1})}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} - \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j+2})}{(x_{j+1} - x_{j+2})(x_j - x_{j+2})} \tag{2.137}$$

ここで

$$\frac{-1}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} + \frac{-1}{(x_{j+1} - x_{j+2})(x_j - x_{j+2})} = \frac{1}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})} \tag{2.138}$$

に注意すると

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} + \frac{f(x_{j+1})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})} + \frac{f(x_{j+2})}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})} \tag{2.139}$$

となる。次に，引き数 x_{j+1} と x_{j+2} を入れ換えて計算する。

$$f[x_j, x_{j+2}, x_{j+1}] = \frac{f[x_j, x_{j+2}] - f[x_{j+2}, x_{j+1}]}{x_j - x_{j+1}} \tag{2.140}$$

$$= \frac{f(x_j) - f(x_{j+2})}{(x_j - x_{j+2})(x_j - x_{j+1})} - \frac{f(x_{j+2}) - f(x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_{j+1})(x_j - x_{j+1})} \tag{2.141}$$

$$= \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})} + \frac{f(x_{j+1})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})} + \frac{f(x_{j+2})}{(x_{j+2} - x_j)(x_{j+2} - x_{j+1})} \tag{2.142}$$

となって2階の差分商 $f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$ は，引き数 x_{j+1} と x_{j+2} を入れ換えても値は変わらない。同様にして，引き数 x_j と x_{j+1} を入れ換えても値は変わらない。したがって，引き数の入れ換えを繰り返しても値は不変である。すなわち，2階の差分商の値は引き数の順序によらない。たとえば

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = f[x_{j+2}, x_j, x_{j+1}] = f[x_{j+2}, x_{j+1}, x_j] \tag{2.143}$$

となる。

一般に n 階の差分商 $f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n}]$ は

$$\begin{aligned} & f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n}] \\ &= \frac{f(x_j)}{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})\cdots(x_j - x_{j+n})} \\ &\qquad + \frac{f(x_{j+1})}{(x_{j+1} - x_j)(x_{j+1} - x_{j+2})\cdots(x_{j+1} - x_{j+n})} + \cdots \\ &\qquad + \frac{f(x_{j+n})}{(x_{j+n} - x_j)(x_{j+n} - x_{j+1})\cdots(x_{j+n} - x_{j+n-1})} \end{aligned} \tag{2.144}$$

$$\equiv \frac{f(x_j)}{l_j(x_j)} + \frac{f(x_{j+1})}{l_{j+1}(x_{j+1})} + \frac{f(x_{j+2})}{l_{j+2}(x_{j+2})} + \cdots + \frac{f(x_{j+n})}{l_{j+n}(x_{j+n})} \tag{2.145}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_{j+k})}{l_{j+k}(x_{j+k})} \tag{2.146}$$

と表現される。ここで導入した新しい関数 $l_{j+k}(x_{j+k})$, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots, n$ は次式

$$l_{j+k}(x_{j+k}) = \prod_{s=0, s\neq k}^{n} (x_{j+k} - x_{j+s}) \tag{2.147}$$

で定義されている。式 (2.145) をみると n 階の差分商 $f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n}]$ は引き数 x_k の入れ替えに対して不変であることが一目で理解できる。高階差分商の対称な表現式 (2.145) は Appendix A で証明する。

2.5 不等間隔差分商によるライプニッツ則

関数 $f(x)$ がすべての x に対して $f(x)=g(x)h(x)$ と表されているとき，関数の積に対する前進差分 (ライプニッツ則) 式 (2.114) は

$$\Delta_{+x}^{n} g(x)h(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[\Delta_{+x}^{n-k} g(x)]\Delta_{+x}^{k} h(x+(n-k)\epsilon) \tag{2.148}$$

であった。このライプニッツ則は不等間隔差分商ではどうなるだろうか？

$f(x)$ の 1 階差分商は $g(x)$ の差分商と $h(x)$ の差分商を使って次のように表される。

$$\begin{aligned}
&f[x_0,x_1]\\
&=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} &(2.149)\\
&=\frac{g(x_0)h(x_0)-g(x_1)h(x_1)}{x_0-x_1} &(2.150)\\
&=\frac{(g(x_0)-g(x_1))h(x_1)+g(x_0)(h(x_0)-h(x_1))}{x_0-x_1} &(2.151)\\
&=g[x_0,x_1]h(x_1)+g(x_0)h[x_0,x_1] &(2.152)
\end{aligned}$$

同様にして 2 階の差分商は

$$\begin{aligned}
&f[x_0,x_1,x_2]\\
&=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}\\
&=\frac{g[x_0,x_1]h(x_1)+g(x_0)h[x_0,x_1]-g[x_1,x_2]h(x_2)-g(x_1)h[x_1,x_2]}{x_0-x_2}\\
&=\frac{g[x_0,x_1]-g[x_1,x_2]}{x_0-x_2}h(x_2)+\frac{g[x_0,x_1](h(x_1)-h(x_2))}{x_0-x_2}\\
&\qquad+\frac{(g(x_0)-g(x_1))h[x_1,x_2]}{x_0-x_2}+\frac{g(x_0)(h[x_0,x_1]-h[x_1,x_2])}{x_0-x_2}\\
&=g[x_0,x_1,x_2]h(x_2)+g[x_0,x_1]h[x_1,x_2][\frac{(x_1-x_2)}{(x_0-x_2)}+\frac{(x_0-x_1)}{(x_0-x_2)}]\\
&\qquad+g(x_0)h[x_0,x_1,x_2]\\
&=g[x_0,x_1,x_2]h(x_2)+g[x_0,x_1]h[x_1,x_2]+g(x_0)h[x_0,x_1,x_2] &(2.153)
\end{aligned}$$

となる。この公式は簡単な構造をしており，引き数 x_0, x_1, x_2 の並び方に特徴がある。f の引き数と同じものが第 1 項目の g の引き数に現れている。第 1 項目の h の引き数は g の最後の引き数を一つだけを含んでいる。第 2 項目の g の引き数は第 1 項目の最後の引き数が消え，その代わりに h の引き数が一つ増え，g の最後の引き数と h の最初の引き数は同じになっている。第 3 項目の g の引き数は第 2 項目の最後の引き数が消え，その代わりに h の引き数が一つ増え，g の最後の引き数と h の最初の引き数は同じである。この構造を拡張すると n 階の差分商に対するライプニッツの公式

$$\begin{aligned} & f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n}] \\ &= g[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n}]h[x_{j+n}] + \\ &\qquad + g[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n-1}]h[x_{j+n-1}, x_{j+n}] \\ &\qquad + \cdots + g[x_j]h[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n}] \end{aligned} \tag{2.154}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} g[x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n-k}]h[x_{j+n-k}, x_{j+n-k+1}, \cdots, x_{j+n}] \tag{2.155}$$

が得られる。証明はそれほど簡単ではない。 Appendix B を見よ。

2.6 不等間隔差分商の記号法

不等間隔差分商の表現として記号 $f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$ が現在共通に使われているが，演算子と演算される関数 $f(x)$ が未分化の状態であり，これでは不等間隔差分商の発展は期待できない (記号法が発達を阻害している)。Jordan の本 [1] に次のような記述がある。

“A function $f(x)$ is given for $x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$. In general case these values are not equidistant. To deal with such functions, the “*Divided Differences* ”have been introduced. $\cdots$. The Calculus,when working with divided differences, is always complicated. The real advantages of the theory of Finite Differences are shown only if the values of the variables x are equidistant. ”

「関数 $f(x)$ の値が点列 $x = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ の上で与えられているとする。一般にこれらの点列は等間隔ではない。このような関数 $f(x)$ を処理するために [差分商] が導入されている。 — 中略 — 差分商を使った Calculus (微積分

[1] Charles Jordan “ Calculus of Finite Differences ”Chelsea Pub.Comp.New York,1965, p.2.

学) はいつも複雑になる。差分学が本当に役に立つのは x の点列が等間隔である時のみである。」

一言でいえば『不等間隔差分商は計算が複雑で役に立たない』といっているのである。われわれはこれに反対し，新しい記号法を導入すれば不等間隔差分商の計算は簡単になり，差分商の理論は有用になると主張している。

このテキストでは，次のような記号法を主に使う。規準点 x, x_j における $f(x)$ の 1 階差分商を

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x) \equiv \frac{f(x) - f(x_j)}{x - x_j} \tag{2.156}$$

で表す。規準点 x, x_j, x_{j+1} における $f(x)$ の 2 階差分商を

$$\Delta_x^{(2,j)} f(x) \equiv \frac{\Delta_x^{(1,j)} f(x) - \Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1})}{x - x_{j+1}} \tag{2.157}$$

ただし

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) \equiv \Delta_x^{(1,j)} f(x)|_{x=x_{j+1}} \tag{2.158}$$

である。規準点 x, x_j, x_{j+1}, x_{j+2} における $f(x)$ の 3 階差分商を

$$\Delta_x^{(3,j)} f(x) \equiv \frac{\Delta_x^{(2,j)} f(x) - \Delta_x^{(2,j)} f(x_{j+2})}{x - x_{j+2}} \tag{2.159}$$

ただし

$$\Delta_x^{(2,j)} f(x_{j+2}) \equiv \Delta_x^{(2,j)} f(x)|_{x=x_{j+2}} \tag{2.160}$$

である。

一般に規準点 $x, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+n-1}$ における $f(x)$ の n 階差分商は $n-1$ 階差分商を使って

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x) \equiv \frac{\Delta_x^{(n-1,j)} f(x) - \Delta_x^{(n-1,j)} f(x_{j+n-1})}{x - x_{j+n-1}} \tag{2.161}$$

と表記する。ここで $n = 0, 1, 2, \cdots,$ について

$$\Delta_x^{(0,j)} f(x_j) \equiv f(x_j) \tag{2.162}$$

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x_{j+n}) \equiv \Delta_x^{(n,j)} f(x)|_{x=x_{j+n}}, \quad n > 0 \tag{2.163}$$

である。この式 (2.161) の意味は明かで x における n 階差分商は 2 点 x と x_{j+n-1} における $n-1$ 階差分商の勾配を表している。

差分商の記号で暗記すべき式は式 (2.161) である。分母の $x-x_{j+n-1}$ に対応して分子に差 $f(x)-f(x_{j+n-1})$ があり，この差に演算子$\Delta_x^{(n-1,j)}$ を作用させると $\Delta_x^{(n-1,j)}(f(x)-f(x_{j+n-1}))=\Delta_x^{(n-1,j)}f(x)-\Delta_x^{(n-1,j)}f(x_{j+n-1})$ となるが，これが分子になっている。この式は漸化式で変化しているのは n である。n 階差分と $n-1$ 階差分の関係を示している。数式処理システム (Reduce) で任意関数 $f(x)$ の不等間隔差分商を計算させるプログラムを作るときはこの漸化式 (2.161) を使う。

n 階差分商 $f[x,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n}]$ と $f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n}]$ や k 階差分商 $f[x_{j+n-k},x_{j+n-k+1},x_{j+n-k+2},\cdots,x_{j+n}]$ は次式

$$f[x,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n}]=\Delta_x^{(n,j+1)}f(x) \tag{2.164}$$

$$f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n}]=\Delta_x^{(n,j)}f(x_{j+n}) \tag{2.165}$$

$$=\Delta_x^{(n,j+1)}f(x_j) \tag{2.166}$$

$$f[x_{j+n-k},x_{j+n-k+1},\cdots,x_{j+n}]=\Delta_x^{(k,j+n-k)}f(x_{j+n}) \tag{2.167}$$

$$=\Delta_x^{(k,j+n-k+1)}f(x_{j+n-k}) \tag{2.168}$$

のように表せる。そして規準点 $x_j,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n}$ におけるライプニッツの公式

$$\begin{aligned}
&f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n}]\\
&=g[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+n}]h[x_{j+n}]+g[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+n-1}]h[x_{j+n-1},x_{j+n}]\\
&\qquad+\cdots+g[x_j]h[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+n}] \qquad (2.169)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}g[x_j,x_{j+1},\cdots,x_{j+n-k}]h[x_{j+n-k},x_{j+n-k+1},\cdots,x_{j+n}] \tag{2.170}$$

は

$$\Delta_x^{(n,j+1)}g(x_j)h(x_j)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}[\Delta_x^{(n-k,j+1)}g(x_j)][\Delta_x^{(k,j+n-k+1)}h(x_{j+n-k})] \tag{2.171}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}[\Delta_x^{(k,j+1)}g(x_j)][\Delta_x^{(n-k,j+k+1)}h(x_{j+k})] \tag{2.172}$$

と表現される。また規準点を $x, x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_{j+n-1}$ と選ぶと

$$\Delta_x^{(n,j)} g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n} [\Delta_x^{(n-k,j)} g(x)][\Delta_x^{(k,j+n-k)} h(x)]_{x=x_{j+n-k-1}} \quad (2.173)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [\Delta_x^{(k,j)} g(x)][\Delta_x^{(n-k,j+k)} h(x)]_{x=x_{j+k-1}} \quad (2.174)$$

となる。ここで $x_{j-1} \equiv x$ である。

蛇足 またしても記号，記号，記号 $\cdots$ の連続である。記号の意味がわからずついていけない。何のことだろう，全くわからない。『昨日は驚いたなぁ！　道ばたでホームレスが難しい【 $\cdots$ 】を熱心に読んでいたのを見たよ』。これは京都に来たある外国の知識人の言葉である。この【 $\cdots$ 】の中の文字は【象形文字の新聞】である。漢字は見慣れない人にとっては難しい記号の連続である。同じように【数学の記号】も外国語である。慣れるまではこんなに難しいものはない。外国語の単語を暗記するように記号の暗記も必要である。慣れてしまえばこんなに便利なものもない。

思考力（想像力，推理力，判断力）があれば数学は自分で勉強できると信じていた著者はサボリ過ぎて大学の数学に全くついていけなくなったことがあった。あまりに新しい記号が多くて，記号の意味が理解できなくなり嫌になったからである。

そう思っているのに新しい記号を導入するのは？と反論されそうである。理由はただ一つ『計算が複雑で役に立たない』といわれている不等間隔差分商の理論を少しでも整理し，見通しをよくしたいためである。新しい数学には新しい記号・言葉がどうしても必要である。 □

次に，不等間隔差分商 $\Delta_x^{(n,j)} f(x)$ から，いままで導入した差分演算子が導き出されることを示す。

1. $\Delta_x^{(n,j)} f(x)$ に $x_{j+k} = x + (k+1)\epsilon$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ を代入すると前進差分演算子になる。すなわち

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x)|_{x_{j+k}=x+(k+1)\epsilon} = \frac{1}{n!} \Delta_{+x}^n f(x) \quad (2.175)$$

である。

注　座標を表す式 $x_{j+k} = x + (k+1)\epsilon$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ の左辺の記号 j (これは点列の始点を示している) が右辺にはない。これは $x_{j+k+1} - x_{j+k} = \epsilon$ となりすべての点が等間隔になり，平等になるので，始点を示す記号 j がいらなくなるからである。 □

2. $\Delta_x^{(n,j)} f(x)$ に $x_{j+k} = x - (k+1)\epsilon$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ を代入すると後退差分演算子になる。すなわち

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x)|_{x_{j+k}=x-(k+1)\epsilon} = \frac{1}{n!} \Delta_{-x}^n f(x) \quad (2.176)$$

である。

3. $\Delta_x^{(n,j)} f(x)$ に $x_{j+k} = x - \frac{n}{2}\epsilon + (k+1)\epsilon\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ を代入すると中心差分演算子になる。すなわち

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x)|_{x_{j+k}=x-\frac{n}{2}\epsilon+(k+1)\epsilon} = \frac{1}{n!}\Delta_x^n f(x) \tag{2.177}$$

である。

4. $\Delta_x^{(n,j)} f(x)$ に $x_{j+k} = q^{k+1}x\ (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ を代入すると $q-$ 差分演算子になる。すなわち

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x)|_{x_{j+k}=q^{k+1}x} = \frac{1}{[n]_q!}\delta_{q,x}^n f(x) \tag{2.178}$$

である。ただし自然数 n について

$$\delta_{q,x}^0 f(x) = f(x), \tag{2.179}$$

$$\delta_{q,x}^n f(x) = \delta_{q,x}\{\delta_{q,x}^{n-1} f(x)\} \tag{2.180}$$

であり，$[n]_q!$ は次式で定義される $q-$ 階乗関数である。

$$[n]_q! = \prod_{k=1}^{n} [k]_q, \tag{2.181}$$

$$[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q} \tag{2.182}$$

$$= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1} \tag{2.183}$$

今後，不等間隔差分商という代わりに差分商と簡略化してよぶこともある。

注　$x_{j+k} = x + (k+1)\epsilon\ (k = 0, 1, 2, \cdots), n = 1, 2$ のとき

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x) = \frac{f(x) - f(x_j)}{x - x_j} \tag{2.184}$$

$$= \frac{f(x) - f(x+\epsilon)}{x - (x+\epsilon)} \tag{2.185}$$

$$= \Delta_{+x} f(x) \tag{2.186}$$

$$\Delta_x^{(2,j)} f(x) = \frac{\Delta_x^{(1,j)} f(x) - \Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1})}{x - x_{j+1}} \tag{2.187}$$

$$= \frac{\Delta_{+x} f(x) - \Delta_{+x} f(x+\epsilon)}{x-(x+2\epsilon)} \tag{2.188}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta_{+x}^2 f(x) \tag{2.189}$$

である。 □

蛇足 式 (2.188) を求めるのに

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) \equiv \left.\frac{f(x)-f(x_j)}{x-x_j}\right|_{x=x_{j+1}} \tag{2.190}$$

$$= \frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j} \tag{2.191}$$

$$= \Delta_{+x} f(x+\epsilon) \tag{2.192}$$

を使った。 □

警告

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x) = \Delta_{+x} f(x)$$

となるので

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) = \Delta_{+x} f(x+2\epsilon)$$

と思うのは間違いである。なぜなら正しくは

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x)|_{x_j=x+\epsilon} = \Delta_{+x} f(x)$$

であり,

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) = \left.\frac{f(x_{j+1})-f(x_j)}{x_{j+1}-x_j}\right|_{x_j=x+\epsilon,\, x_{j+1}=x+2\epsilon} \tag{2.193}$$

$$\neq \Delta_{+x} f(x)|_{x=x_{j+1}} \tag{2.194}$$

である。最後の式 (2.194) で $x = x_{j+1}$ を代入すると，$x_j = x+\epsilon$ の中の x にも $x = x_{j+1}$ が代入されて $x_j = x+3\epsilon$ となるが間違いの原因である。 □

差分商が規準点の入れ換えに対して不変であることを使うと (j, k, n を自然数として)，一般に次の関係式

$$\Delta_x^{(k,j+n-k)} h(x)|_{x=x_{j+n}} = \Delta_x^{(k,j+n-k+1)} h(x)|_{x=x_{j+n-k}} \tag{2.195}$$

が成り立つ。なぜなら左辺の規準点は $x = x_{j+n}, x_{j+n-k}, x_{j+n-k+1}, \cdots, x_{j+n-1}$ であり，右辺は $x = x_{j+n-k}, x_{j+n-k+1}, \cdots, x_{j+n-1}, x_{j+n}$ であるから，お互いに等しい規準点をもつ。だから左辺と右辺は等しい。

演習問題 5 $x_{j+k} = x + (k+1)\epsilon$ のとき，直接計算によって式 (2.175)

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x) = \frac{1}{n!}\Delta_{+x}^n f(x)$$

が $n = 1, 2$ に対して成り立つことを示せ。

演習問題 6 $x_{j+k} = x + (k+1)\epsilon$ のとき，自然数 n と整数 j, m, n に対して次式を証明せよ。

$$\Delta_x^{(n,j+m+1)} f(x_{j+m}) = \frac{1}{n!}\Delta_{+x}^n f(x + (m+1)\epsilon)$$

ヒント 関係式 (2.195) を使う。

注意 上式の右辺の表現式 $\Delta_{+x}^n f(x + (m+1)\epsilon)$ は，たとえば $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
\Delta_{+x} f(x + (m+1)\epsilon) &= \Delta_{+x} f(x)\big|_{x=x+(m+1)\epsilon} \\
&= \left.\frac{f(x) - f(x+\epsilon)}{x - (x+\epsilon)}\right|_{x=x+(m+1)\epsilon} \\
&= \frac{f(x + (m+1)\epsilon) - f(x + (m+2)\epsilon)}{x + (m+1)\epsilon - (x + (m+2)\epsilon)} \\
&= \frac{f(x + (m+2)\epsilon) - f(x + (m+1)\epsilon)}{\epsilon}
\end{aligned}$$

である。すべての x に $x + (m+1)\epsilon$ が代入される。

演習問題 7 $x_{j+k} = x + (k+1)\epsilon$ (kは整数) のとき，式 (2.175)

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x) = \frac{1}{n!}\Delta_{+x}^n f(x)$$

を証明せよ。

演習問題 8 $x_{j+k} = q^{k+1}x$ のとき，直接計算によって次式が $n = 1, 2$ に対して成り立つことを示せ。

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x) = \frac{1}{[n]_q!}\delta_{q,x}^n f(x)$$

演習問題 9 $x_{j+k} = q^{k+1}x$ のとき，自然数 n と整数 k, m に対して次式を証明せよ。

$$\Delta_x^{(n,j+m+1)} f(x_{j+m}) = \frac{1}{[n]_q!}\delta_{q,x}^n f(q^{m+1}x) \tag{2.196}$$

ヒント 関係式 (2.195) を使う。

注意　上式の右辺の表現式 $\delta_{q,x}^n f(q^{m+1}x)$ は，たとえば $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\delta_{q,x} f(q^{m+1}x) &= \delta_{q,x} f(x)|_{x=q^{m+1}x} \\ &= \left.\frac{f(x)-f(qx)}{x-qx}\right|_{x=q^{m+1}x} \\ &= \frac{f(q^{m+1}x)-f(q^{m+2}x)}{q^{m+1}x-q^{m+2}x}\end{aligned}$$

である。すべての x に $q^{m+1}x$ が代入される。

演習問題 10　式 (2.196) を利用して，$x_{j+k}=q^{k+1}x$ のとき，次式を証明せよ。

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x) = \frac{1}{[n]_q!}\delta_{q,x}^n f(x)$$

演習問題 11　$x_{j+k}=q^{k+1}x$ のとき，差分商に対するライプニッツの公式 (2.173) より $q-$差分に対するライプニッツの公式を導け。

$$\frac{1}{[n]_q!}\delta_{q,x}^n g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{[n-k]_q![k]_q!}\delta_{q,x}^{n-k} g(x)\,\delta_{q,x}^k h(q^{n-k}x)$$

2.7　x のべき乗の差分商

前節の定義により x のべき乗 x^n の差分商は次のように計算される。

$$\Delta_x^{(1,j)} x^0 = 0 \tag{2.197}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(1,j)} x &= \frac{x-x_j}{x-x_j} \\ &= 1,\end{aligned} \tag{2.198}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(1,j)} x^2 &= \frac{x^2-x_j^2}{x-x_j} \\ &= x+x_j,\end{aligned} \tag{2.199}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(1,j)} x^3 &= \frac{x^3-x_j^3}{x-x_j} \\ &= x^2+xx_j+x_j^2,\end{aligned} \tag{2.200}$$

$$\cdots$$

$$\Delta_x^{(2,j)} x^0 = 0 \tag{2.201}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(2,j)} x &= \frac{\Delta_x^{(1,j)} x - \Delta_x^{(1,j)} x|_{x=x_{j+1}}}{x - x_{j+1}} \\ &= \frac{1-1}{x - x_{j+1}} \\ &= 0,\end{aligned} \tag{2.202}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(2,j)} x^2 &= \frac{\Delta_x^{(1,j)} x^2 - \Delta_x^{(1,j)} x^2|_{x=x_{j+1}}}{x - x_{j+1}} \\ &= \frac{x + x_j - (x_{j+1} + x_j)}{x - x_{j+1}} \\ &= 1,\end{aligned} \tag{2.203}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(2,j)} x^3 &= \frac{\Delta_x^{(1,j)} x^3 - \Delta_x^{(1,j)} x^3|_{x=x_{j+1}}}{x - x_{j+1}} \\ &= \frac{x^2 + x x_j + x_j^2 - (x_{j+1}^2 + x_{j+1} x_j + x_j^2)}{x - x_{j+1}} \\ &= x + x_j + x_{j+1},\end{aligned} \tag{2.204}$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(3,j)} x^2 &= \frac{\Delta_x^{(2,j)} x^2 - \Delta_x^{(2,j)} x^2|_{x=x_{j+2}}}{x - x_{j+2}} \\ &= \frac{1-1}{x - x_{j+2}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{2.205}$$

$$\begin{aligned}\Delta_x^{(3,j)} x^3 &= \frac{\Delta_x^{(2,j)} x^3 - \Delta_x^{(2,j)} x^3|_{x=x_{j+2}}}{x - x_{j+2}} \\ &= \frac{x + x_j + x_{j+1} - (x_{j+2} + x_j + x_{j+1})}{x - x_{j+2}} \\ &= 1\end{aligned} \tag{2.206}$$

一般に自然数 m, n に対して

$$\Delta_x^{(n,j)} x^m = \begin{cases} 0, & m < n \text{ のとき} \\ 1, & m = n \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.207}$$

である。不等間隔差分商 $\Delta_x^{(n,j)}$ と，たとえば前進差分Δ_{+x}^n との主な違いが因子 $n!$ であることに注意すると，x^m, $m = 0, 1, 2$ の不等間隔差分商の結果

$$\Delta_x^{(2,j)} x^0 = 0, \tag{2.208}$$

$$\Delta_x^{(2,j)} x^1 = 0, \tag{2.209}$$

$$\Delta_x^{(2,j)} x^2 = 1 \tag{2.210}$$

は，それほど不思議な結果ではない。しかし，これを不等間隔差分商の対称な表現式，たとえば

$$\Delta_x^{(2,j)} x^m = \frac{x^m}{(x - x_j)(x - x_{j+1})} + \frac{{x_j}^m}{(x_j - x)(x_j - x_{j+1})} + \frac{{x_{j+1}}^m}{(x_{j+1} - x)(x_{j+1} - x_j)}$$

と組み合わせたのが次のオイラーの恒等式

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0 \tag{2.211}$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0 \tag{2.212}$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1 \tag{2.213}$$

である。ただし $a = x, b = x_j, c = x_{j+1}$ である。不等間隔の規準点は完全に任意であるので $x = a, x_j = b, x_{j+1} = c$ とおけるのである。連続空間での x^m の *trivial* な (つまらない) 微分公式を差分公式に翻訳すると *non-trivail* な代数的恒等式に変身するのである。

注　オイラー (Euler,Leonhard 1707-839) の公式の一般形は

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{{x_j}^m}{\phi'(x_j)} = \begin{cases} 0 & m < n-1 \text{ のとき} \\ 1 & m = n-1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.214}$$

である。ただし

$$\phi(x) = \prod_{j=1}^{n}(x - x_j) \tag{2.215}$$

$$\phi'(x_j) = \left.\frac{d\phi(x)}{dx}\right|_{x=x_j} \tag{2.216}$$

である。 □

演習問題 12 差分商の公式を利用してオイラーの公式を拡張しよう。たとえば次式

$$\frac{a^m}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^m}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^m}{(c-a)(c-b)} = ?$$

の右辺は $m = 3, 4$ の場合，どうなるだろうか？

2.8 不等間隔差分商による恒等式（テーラー展開の差分化）

不等間隔差分商の定義より，x の任意の関数 $f(x)$ に対して次の恒等式が成り立つ。

$$f(x) \equiv f(x_j) + (x - x_j)\Delta_x^{(1,j)} f(x), \tag{2.217}$$

$$\Delta_x^{(1,j)} f(x) \equiv \Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) + (x - x_{j+1})\Delta_x^{(2,j)} f(x), \tag{2.218}$$

$$\Delta_x^{(2,j)} f(x) \equiv \Delta_x^{(2,j)} f(x_{j+2}) + (x - x_{j+2})\Delta_x^{(3,j)} f(x), \tag{2.219}$$

$$\cdots$$

$$\Delta_x^{(n,j)} f(x) \equiv \Delta_x^{(n,j)} f(x_{j+n}) + (x - x_{j+n})\Delta_x^{(n,j)} f(x). \tag{2.220}$$

第一の式に第二以下の式を次々に代入すると

$$f(x)$$

$$= f(x_j) + (x - x_j)[\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) + (x - x_{j+1})\Delta_x^{(2,j)} f(x)] \tag{2.221}$$

$$= f(x_j) + (x - x_j)\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) + (x - x_j)(x - x_{j+1})[\Delta_x^{(2,j)} f(x_{j+2}) + \Delta_x^{(3,j)} f(x)] \tag{2.222}$$

$$= f(x_j) + (x - x_j)\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) + (x - x_j)(x - x_{j+1})\Delta_x^{(2,j)} f(x_{j+2}) + \cdots + \underline{(x - x_j)(x - x_{j+1})(x - x_{j+2})\cdots(x - x_{j+n})\Delta_x^{(n+1,j)} f(x)} \tag{2.223}$$

となる。

この $f(x)$ の表現形式は差分商 $\Delta_x^{(n,j)}f(x)$ の定義式を書き直しただけで，どのような $f(x)$ に対しても成り立つ恒等式である。単なる書き換えであるので，ほとんど意味がないように見える。しかし，数学では新しい表現形式が他の結果と結びついて深い意味をもつ場合が少なくない。この表現形式より

1. 2 次元空間上の複数の点と点を結ぶ補間公式が生成される。

2. 関数 $f(x)$ の微分可能性を仮定するとテーラー展開の公式が生成される。

注 初めて微積分学を勉強するときに，とくに難しく感じるのがテーラー展開の剰余項の存在である。よくわからない剰余項を導入すると $f(x)$ のテーラー展開が完成するのである。しかも，この剰余項を使って数値計算の誤差評価を行うので，剰余項を無視するわけにはいかない。数値計算が嫌いになった記憶がある。実はテーラー展開とは，たとえば $n=3$ のとき $f(x)$ の表現式

$$f(x) \equiv f(x_j) + (x-x_j)\Delta_x^{(1,j)}f(x_{j+1}) + (x-x_j)(x-x_{j+1})\Delta_x^{(2,j)}f(x_{j+2}) + \underline{(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})\Delta_x^{(3,j)}f(x)} \quad (2.224)$$

のことである。上の表現式における最後の項 $(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})\Delta_x^{(3,j)}f(x)$ が剰余項であるのである。関数 $f(x)$ の微分可能性を仮定すると，極限操作 $\lim_{\epsilon\to 0}$ によりテーラー展開式が生まれるのである。難しいのは表現式の構造ではなく極限操作であるのである。 □

2.9 n 重積 $x^{(n,j)}$

$f(x)$ の表現式に現れた多項式 $(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})\cdots(x-x_{j+n-1})$ を x の n 重積とよび，記号 $x^{(n,j)}$ で表記する。n 重積 $x^{(n,j)}$ を次式で定義する。

$$x^{(0,j)} = 1 \quad (2.225)$$

$$x^{(1,j)} = (x-x_j) \quad (2.226)$$

$$x^{(2,j)} = (x-x_j)(x-x_{j+1}) \quad (2.227)$$

$$x^{(3,j)} = (x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2}) \quad (2.228)$$

$$\cdots$$

$$x^{(n,j)} = (x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})\cdots(x-x_{j+n-1}) \quad (2.229)$$

$$= \prod_{s=0}^{n-1}(x - x_{j+s}) \tag{2.230}$$

この $x^{(n,j)}$ は次のような性質をもっている。

1 線形独立性　x の n 重積 $x^{(n,j)}$ は n 次の多項式である。そして $x^{(k,j)}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ は線形独立である。すなわち任意の x に対して

$$c_0 x^{(0,j)} + c_1 x^{(1,j)} + c_2 x^{(2,j)} + \cdots + c_n x^{(n,j)} = 0 \tag{2.231}$$

ならば

$$c_0 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = 0,\ c_3 = 0,\ \cdots,\ c_n = 0 \tag{2.232}$$

である。

2 零点　$x = x_{j+k}$, $k = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ において,

$$x^{(m,j)}|_{x=x_{j+k}} = 0 \tag{2.233}$$

である。

3 差分則　任意の自然数 $m, n\ (m \geq n)$ に対して

$$\Delta_x^{(n,j)} x^{(m,j)} = x^{(m-n,j+n)} \tag{2.234}$$

である。

次に x の n 重積 $x^{(n,j)}$ に $x = x_k$ を代入したものを $x_k^{(n,j)}$ と表記する。

$$x_k^{(n,j)} = x^{(n,j)}|_{x=x_k} \tag{2.235}$$

$$= (x_k - x_j)(x_k - x_{j+1})(x_k - x_{j+2}) \cdots (x_k - x_{j+n-1}) \tag{2.236}$$

$$= \prod_{s=0}^{n-1}(x_k - x_{j+s}) \tag{2.237}$$

さらに x の n 重積 $x^{(n,j)}$ を因子 $(x - x_k)$ で割ったものを $x^{(n,j,\hat{k})}$

$$x_k^{(n,j,\hat{k})} = \frac{x^{(n,j)}}{(x - x_k)} \tag{2.238}$$

と表記する。したがって，$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ のとき

$$x^{(n,0,\hat{k})} = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1})(x - x_{k+2}) \cdots (x - x_{n-1})$$

$$= \prod_{s=0}^{k-1}(x - x_s) \prod_{s=k+1}^{n-1} (x - x_s) \tag{2.239}$$

$$= \prod_{s=0, s\neq k}^{n-1} (x - x_s) \tag{2.240}$$

となる。

この記号を使うと式 (2.147) で導入した関数 $l_{j+k}(x_{j+k})$

$$l_{j+k}(x_{j+k}) = \prod_{s=0, s\neq k}^{n} (x_{j+k} - x_{j+s}) \tag{2.241}$$

は

$$l_{j+k}(x_{j+k}) = x_{j+k}^{(n+1, j, \widehat{j+k})} \tag{2.242}$$

と書き表される。

演習問題 13 式 (2.231) ならば式 (2.232), を示せ。

演習問題 14 式 (2.234) を $m = 3$, $n = 1, 2, 3$ のとき確かめよ。時間があれば任意の自然数 m, n $(m \geq n)$ に対して式 (2.234) を証明せよ。

演習問題 15 $k = 0, 1, 2, \cdots, n$ のとき関係式

$$\frac{1}{x_k^{(n,0,\hat{k})}} - \frac{1}{x_k^{(n,1,\hat{k})}} = \frac{x_0 - x_n}{x_k^{(n+1,0,\hat{k})}}$$

を示せ。

注 この関係式は差分商 $f[x_0, x_1, \cdots, x_n]$ の引き数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ に関する対称性 (引き数を入れ換えても不変) を証明するときに使う。

演習問題 16 自然数 m, n に対して次の等式

$$x^{(k+n,0)} = x^{(k,0)} x^{(n,k)},$$

$$x_k^{(k+n,0,\hat{k})} = x_k^{(k,0)} x_k^{(n-1,k+1)}$$

を示せ。

演習問題 17 6 ページの演習問題 5

$$1 + \sum_{n=0}^{m} \prod_{s=0}^{n} \frac{(x_{m+1} - x_s)}{(x_0 - x_{s+1})} = 0$$

は次の恒等式

$$1+\sum_{n=0}^{m}\prod_{s=0}^{n}\frac{(x-x_s)}{(x_0-x_{s+1})}=\prod_{j=1}^{m+1}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

の特別の場合，$x=x_{m+1}$ である。この恒等式は n 重積を使うと

$$x^{(m,1)}=\sum_{n=0}^{m}x^{(n,0)}x_0^{(m-n,n+1)}$$

と表現できることを示せ。

蛇足　上の表現式を見て「不等間隔差分商による恒等式」がすぐにヒラメク人は研究者としての才能がある。

2.10 差分商の拡張

いままで n 階差分商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ は相異なる点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ に対して定義されてきたが，この定義を点が重なる場合に拡張する。このため関数 $f(x)$ を x の連続関数であるばかりでなく区間 [a,b] で C^n 級 (n 回微分可能な関数) とし，相異なる $(n+1)$ 個の点は，この区間 $[a,b]$ 内に含まれると仮定する。

まず 1 階の差分商 $f[x_0,x_1]$ を，$f(x)$ の微分と積分を使って書き直すと

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \tag{2.243}$$

$$=\frac{1}{x_1-x_0}\int_{x_0}^{x_1}f'(u)du \tag{2.244}$$

$$=\int_0^1 f'\left(x_0+t_1(x_1-x_0)\right)dt_1 \tag{2.245}$$

となる。2 階の差分商　$f[x_0,x_1,x_2]$ は

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_2,x_0]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} \tag{2.246}$$

$$=\frac{f[x_0,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_1} \tag{2.247}$$

$$=\frac{1}{x_2-x_1}\left\{\int_0^1 f'(x_0+t_1(x_2-x_0))dt_1\right.$$

$$-\int_0^1 f'(x_0+t_1(x_1-x_0))dt_1 \Bigg\} \quad (2.248)$$

となる。この式は，引き数 x_0, x_1, x_2 の入れ換えによって変わらないこと (対称性) に注意する。

ここで被積分関数を再び，微分と積分を使って書き直す。$f(x)$ の n 回微分を $f^{(n)}(x)$ で表すと

$$\frac{1}{x_2-x_1}\{f'(x_0+t_1(x_2-x_0))-f'(x_0+t_1(x_1-x_0))\} \quad (2.249)$$

$$= \int_0^{t_1} f^{(2)}(x_0+t_1(x_1-x_0)+t_2(x_2-x_1))\,dt_2 \quad (2.250)$$

となる。この表現を式 (2.248) に代入して

$$f[x_0,x_1,x_2] = \int_0^1\int_0^{t_1} f^{(2)}(x_0+t_1(x_1-x_0)+t_2(x_2-x_1))\,dt_2dt_1$$

を得る。この表現形式を一般化すると

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n] = \int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}\left(x_0+\sum_{k=1}^{n} t_k(x_k-x_{k-1})\right)dt_n\cdots dt_2dt_1 \quad (2.251)$$

となる。証明には数学的帰納法を使うが省略する。

式 (2.251) の右辺は点が重なる場合，$x_i = x_j\ (i \neq j)$ でも意味をもつ。ゆえに C^n 級の関数 $f(x)$ の n 階差分商を，点が重なる場合に拡張して，式 (2.251) で定義する。このとき $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ は，引き数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ の連続関数になり，対称性も保存される。

定義式 (2.251) は $f(x)$ の差分商と微分の関係についていろいろな情報を教えてくれる。まず，式 (2.251) の右辺で，引き数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ をすべて$=x$ とおくと

$$f[\overbrace{x,x,\cdots,x}^{n+1}] = \int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(x)dt_n\cdots dt_2dt_1 \quad (2.252)$$

$$= \frac{1}{n!}f^{(n)}(x) \quad (2.253)$$

すなわち，すべての点が重なるとき $f(x)$ の n 階差分商はその点における $f(x)$ の n 回微分 $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ を $n!$ で割ったものに等しい。

関係式

$$\frac{d}{dx}f[x_0,\cdots,x_n,x]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x,x] \tag{2.254}$$

を使うと，一般的に $f(x)$ が区間 [a,b] で C^{n+k+1} クラス級のとき

$$\frac{d^k}{dx^k}f[x_0,\cdots,x_n,x]=k!f[x_0,x_1,\cdots,x_n,\overbrace{x,x,\cdots,x}^{k+1}] \tag{2.255}$$

が成り立つ。

次に式 (2.251) の右辺は，引き数 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ の入れ換えに対して不変であるので，引き数の大きさを次のように定める。

$$x_0\le x_1\le x_2\cdots\le x_n \tag{2.256}$$

このとき，式 (2.251) の右辺の被積分関数 $f^{(n)}(u)$ の変数 $u\equiv x_0+\sum_{k=1}^{n}t_k(x_k-x_{k-1})$ は，すべての $k(=1,2,\cdots,n)$ に対して (x_k-x_{k-1}) が正の値または 0 になるので，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ が最大の値をとるとき u の値は最大になる。積分範囲内での t_n の最大値 t_{n-1} を u に代入すると $u=x_0+t_1(x_1-x_0)+t_2(x_2-x_1)+\cdots+t_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-2})+t_{n-1}(x_n-x_{n-1})=x_0+t_1(x_1-x_0)+t_2(x_2-x_1)+\cdots+t_{n-1}(x_n-x_{n-2})$ であり，この u に t_{n-1} の最大値 t_{n-2} を代入する$\cdots$ という操作を繰り返すと積分範囲内での u の最大値は x_n となる。同じ積分範囲内での u の最小値は簡単で，$t_1,t_2,\cdots,t_n$ が最小の値 $(=0)$ をとるとき，u は最小で $u=x_0$ である。すなわち被積分関数 $f^{(n)}(u)$ の u の動く範囲は $x_0\le u\le x_n$ となる。この範囲内で $f^{(n)}(u)$ の最大値と最小値をそれぞれ $f^{(n)}_{\max}$ と $f^{(n)}_{\min}$ で表す。このとき，次の不等式が成り立つ。

$$\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}f^{(n)}_{\min}dt_n\cdots dt_2dt_1\left(=\frac{1}{n!}f^{(n)}_{\min}\right) \tag{2.257}$$

$$\le\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}f^{(n)}(u)dt_n\cdots dt_2dt_1 \tag{2.258}$$

$$\le\int_0^1\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{n-1}}f^{(n)}_{\max}dt_n\cdots dt_2dt_1\left(=\frac{1}{n!}f^{(n)}_{\max}\right) \tag{2.259}$$

$f^{(n)}(u)$ は u の連続関数であるから，u を動かすと $f^{(n)}(u)$ は $f^{(n)}_{\max}$ と $f^{(n)}_{\min}$ の間の任意の値をとり得る。したがって，この不等式から

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \equiv \int_0^1 \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} f^{(n)}(u) dt_n \cdots dt_2 dt_1 \quad (2.260)$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi) \quad (2.261)$$

となるような $u = \xi$ が存在する。ここで，ξ は $x_0 < \xi < x_n$ である。ただし，引き数の間には式 (2.256) の順序を仮定している。この順序を仮定しない場合には ξ は $\min(x_0, x_1, \cdots, x_n) < \xi < \max(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ である。

2.11 テーラー展開

前節で得られた差分商と微分の関係，

$$f[x, x, \cdots, x] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) \quad (2.262)$$

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_{n+1} \quad (2.263)$$

は「テーラー展開 (Taylor expansion) の公式

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f^{(1)}(x_0) + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2 f^{(2)}(x_0)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n f^{(n)}(x_0) + R_n \quad (2.264)$$

$$R_n(\xi) = \frac{1}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x \quad (2.265)$$

は差分商の恒等式

$$f(x) \equiv f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2]$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \cdots$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) f[x_0, x_1, \cdots, x_n, x] \quad (2.266)$$

の特別の場合である。」ことを示している。

テーラー展開の公式，とくに剰余項 R_n を自分で計算して，正しく理解するのは非常に難しい。それに比べると，差分商の恒等式の簡明さは驚くほどである。

3

補間法 (点と点の間を推定する)

離散的なデータをどのように連続化するかを考える。たとえば, ある場所での温度を時間 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ で測定したデータ $\{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ がある。これをみて観測されていない時間での温度の移り変わりを推定したい。どうしたらよいか？

最も簡単な場合は観測時点が 2 点の場合である。この場合 2 点の間の値は 2 点を結ぶ直線 (1 次式) で与えるのが，もっとも簡単である。(x, y) 平面上で考える (図 3.1) と，任意の直線の方程式は $y = ax + b$ である。時間 x_1 で温度が y_1，時間 x_2 で温度が y_2 であるので次の方程式

$$\begin{cases} y_1 &= a + bx_1 \\ y_2 &= a + bx_2 \end{cases}$$

より，定数 a, b が決まり，

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x \\ &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2 \end{aligned}$$

となる。この式を使って点と点の間の値を推定する。

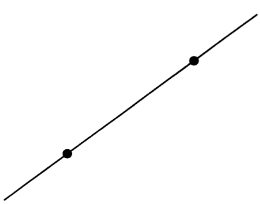


図 3.1　(x, y) 平面上の 2 点を結ぶ直線

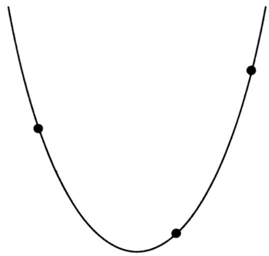


図 **3.2** (x, y) 平面上の 3 点を結ぶ線

次に観測時点が 3 点の場合を考える。この場合 3 点は 2 次曲線 $y = a + bx + cx^2$ で結ばれていると仮定すると，次の方程式

$$y_1 = a + bx_1 + c{x_1}^2,$$

$$y_2 = a + bx_2 + c{x_2}^2,$$

$$y_3 = a + bx_3 + c{x_3}^2$$

より，定数 a, b, c が決まる。結果をまとめると次式

$$y = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3$$

となる。途中の計算を省略したが，結果が正しいことは一目でわかる。上式で $x = x_1$ と置くと第 1 項以外は 0 になり，第 1 項の y_1 の係数は分母分子が消し合って 1 になる。したがって $x = x_1$ のとき $y = y_1$ である。同様にして，$x = x_2$ のとき $y = y_2$ であり，$x = x_3$ のとき $y = y_3$ になる。この結果を一般化したものが，ラグランジュの補間公式である。

蛇足 研究者としての眼力のある人は上式の美しさ (規則性) を見抜くはずである。優れた研究者は計算をせずに 4 点を結ぶ 3 次式を予想し，さらに $N + 1$ 点を結ぶ N 次式までも予想できる。

3.1 ラグランジュの補間公式

相異なる $n + 1$ 個の点，x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_n における関数値 $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$ が与えられているとする。高々 n 次の x の多項式 $p_n(x)$ を考え，これらの $n + 1$ 個の点上での $p_n(x_i)$ の値が $f(x_i)$ と一致するとき，$p_n(x)$ を $f(x)$ の n 次補間多項式という。補間とは関数 $f(x)$ の数値表から表中に与えられていない $x \neq x_i$ に対応する $f(x)$ の値を推定することをいう。

いま，$f(x)$ の n 次補間多項式 $p_n(x)$ を

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{3.1}$$

とする。点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対応する関数 $f(x)$ の値が $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ であるので，$p_n(x)$ は次の方程式を満たす。

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 {x_0}^2 + \cdots + a_n {x_0}^n \tag{3.2}$$

$$f(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 {x_1}^2 + \cdots + a_n {x_1}^n \tag{3.3}$$

$$f(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 {x_2}^2 + \cdots + a_n {x_2}^n \tag{3.4}$$

$$\cdots$$

$$f(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 {x_n}^2 + \cdots + a_n {x_n}^n \tag{3.5}$$

ここで，係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ を未知数と思い，上式を $n+1$ 個の未知数に対する $n+1$ 個の連立線形方程式と見ると，係数の作る行列式はヴァンデルモンド (Vandermonde) の行列式で

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \ldots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_2}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \tag{3.6}$$

となり，点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ は相異なる点であるのでこの行列式は 0 にはならない。したがって，係数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ は一意的に定まる。すなわち，$n+1$ 個の異なる点に関する $f(x)$ の n 次補間多項式はただ一つ存在する。

注　ヴァンデルモンドの行列式で $x_i = x_j$ と仮定すると二つの行が等しくなり，行列式の値は 0 になる。したがって，行列式は因子 $(x_i - x_j)$ を含んでいる。すべての因子の組み合わせは

$$\prod_{i>j}(x_i - x_j) \tag{3.7}$$

だけある。一方，この行列式を $x_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ の代数式とみなすと代数式の次数は

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{3.8}$$

となり，因子の組み合わせによる次数と一致している。比例係数は特別な項，たとえば $x_1 x_2^2 \cdots x_n^n$ の係数を比較して決定される。 □

ここで次式で定義される関数 $l(x), l_i(x)$

$$l(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) \tag{3.9}$$

$$l_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) \tag{3.10}$$

を導入する。関数 $l_i(x)$ は $l(x)$ から因子 $(x - x_i)$ を抜いた関数 $l_i(x)/(x - x_i)$ である。$i = 0, 1, 2, \cdots, n$ のとき，x に x_i を代入すると $l(x_i) = 0$ となる。しかし，$l_i(x_i) \neq 0$ である。$l_i(x_i)$ の値は

$$l_i(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) \tag{3.11}$$

である。$n = 4, i = 1$ のとき具体的に表示すると

$$l_1(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \tag{3.12}$$

となり，$n = 4, i = 2$ のときは

$$l_2(x_2) = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \tag{3.13}$$

となる。二つの式を見比べると上式で x_1 と x_2 を入れ換えた式が下式に等しい。この事実は任意の i, j に対して成立し，$l_i(x_i)$ の x_i を x_j と入れ換えた式が $l_j(x_j)$ になる。

さらに，関数 $L_i(x)$ を次式

$$L_i(x) = \frac{l_i(x)}{l_i(x_i)} \tag{3.14}$$

$$= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} \tag{3.15}$$

で定義すると，関数 $L_i(x_j)$ は $i = j$ のとき分子と分母が同じになって 1，$i \neq j$ のとき 0 になるという特別な性質がある。すなわち

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \tag{3.16}$$

である。ここで δ_{ij} はクロネッカーのデルタ関数で，$i = j$ のとき 1，$i \neq j$ のとき 0 と定義されている。

関数 $L_i(x)$ を使って，n 次多項式 $p_n(x)$ を次式で導入する。

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{3.17}$$

$p_n(x)$ は n 次多項式であり，$x = x_j$ のとき

$$\begin{aligned} p_n(x_j) &= \sum_{i=0}^{n} L_i(x_j) f(x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \delta_{ij} f(x_i) \\ &= f(x_j) \end{aligned}$$

となって確かに補間多項式の条件を満たしている。前に示したように「$n+1$ 個の異なる点に関する $f(x)$ の n 次補間多項式はただ一つ存在する」という補間多項式の一意性により，この $p_n(x)$ が $f(x)$ の n 次補間多項式 である。これをラグランジュ(Lagrange) の補間公式という。

注　方程式 (3.2)〜(3.5) に方程式 (3.1) を追加した方程式系を $n+1$ 個 の未知数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対する $n+2$ 個の連立線形方程式と見ると，線形方程式の解の存在条件から係数の作る行列式が 0 になる。したがって，補間多項式 $p_n(x)$ は次式を満たしている。

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \ldots & {x_0}^n & -f(x_0) \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \ldots & {x_1}^n & -f(x_1) \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \ldots & {x_2}^n & -f(x_2) \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & \ldots & {x_3}^n & -f(x_3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \ldots & {x_n}^n & -f(x_n) \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^n & -p_n(x) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.18}$$

□

確認のため，$x = x_i$ とおくと $p_n(x_i) = f(x_i)$ より，行列式の二つの行が等しくなり，上の等式の正しさが確かめられる。この行列式を最後の列で展開すると

$$f(x_0) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & {x_1}^3 & \ldots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & {x_2}^3 & \ldots & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & {x_3}^2 & {x_3}^3 & \ldots & {x_3}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & {x_n}^3 & \ldots & {x_n}^n \\ 1 & x & x^2 & x^3 & \ldots & x^n \end{vmatrix}$$

$$
-f(x_1)\begin{vmatrix}
1 & x_0 & {x_0}^2 & {x_0}^3 & \dots & {x_0}^n \\
1 & x_2 & {x_2}^2 & {x_2}^3 & \dots & {x_2}^n \\
1 & x_3 & {x_3}^2 & {x_3}^3 & \dots & {x_3}^n \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
1 & x_n & {x_n}^2 & {x_n}^3 & \dots & {x_n}^n \\
1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n
\end{vmatrix}
$$

$$
+f(x_2)\begin{vmatrix}
1 & x_0 & {x_0}^2 & {x_0}^3 & \dots & {x_0}^n \\
1 & x_1 & {x_1}^2 & {x_1}^3 & \dots & {x_1}^n \\
1 & x_3 & {x_3}^2 & {x_3}^3 & \dots & {x_3}^n \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
1 & x_n & {x_n}^2 & {x_n}^3 & \dots & {x_n}^n \\
1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n
\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots
$$

$$
+(-1)^k f(x_k)\begin{vmatrix}
1 & x_0 & {x_0}^2 & {x_0}^3 & \dots & {x_0}^n \\
1 & x_1 & {x_1}^2 & {x_1}^3 & \dots & {x_1}^n \\
1 & x_2 & {x_2}^2 & {x_2}^3 & \dots & {x_2}^n \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
1 & x_{k-1} & {x_{k-1}}^2 & {x_{k-1}}^3 & \dots & {x_{k-1}}^n \\
1 & x_{k+1} & {x_{k+1}}^2 & {x_{k+1}}^3 & \dots & {x_{k+1}}^n \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
1 & x_n & {x_n}^2 & {x_n}^3 & \dots & {x_n}^n \\
1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n
\end{vmatrix}
$$

$$
+\cdots
$$

$$
+(-1)^{n+1} p_n(x)\begin{vmatrix}
1 & x_0 & {x_0}^2 & {x_0}^3 & \dots & {x_0}^n \\
1 & x_1 & {x_1}^2 & {x_1}^3 & \dots & {x_1}^n \\
1 & x_2 & {x_2}^2 & {x_2}^3 & \dots & {x_2}^n \\
1 & x_3 & {x_3}^2 & {x_3}^3 & \dots & {x_3}^n \\
\multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\
1 & x_n & {x_n}^2 & {x_n}^3 & \dots & {x_n}^n
\end{vmatrix}
$$

$$
= 0 \tag{3.19}
$$

が得られる。この式を $p_n(x)$ について解き整理すると，前述の表現式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i) \tag{3.20}$$

が得られる。

ラグランジュの補間公式は理論的には簡明ではあるが，次数 n が違うと関数 $L_i(x)$ が全く異なるので無駄な計算が多いという欠点がある。また誤差評価も簡単ではない。この欠点を補うのがニュートンの差分商補間公式である。

3.2 ニュートンの差分商補間公式

$f(x)$ に対する表現式は x の n 重積 $x^{(n,j)} = \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_{j+k})$ を使って表現すると，任意の n に対して

$$\begin{aligned} f(x) \equiv f(x_j) &+ x^{(1,j)}\Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1}) + x^{(2,j)}\Delta_x^{(2,j)} f(x_{j+2}) + \cdots \\ &+ x^{(n-1,j)}\Delta_x^{(n-1,j)} f(x_{j+n-1}) + x^{(n,j)}\Delta_x^{(n,j)} f(x) \end{aligned} \tag{3.21}$$

である。この式は恒等式であるので，x に何を代入しても左辺と右辺は等しい。ここで関数 $f(x)$ が m 次の多項式であると仮定する。このとき，式 (2.207) より，$m < n$ のとき $\Delta_x^{(n,j)} p_m(x) = 0$ となるので，上式は

$$\begin{aligned} p_m(x) \equiv p_m(x_j) &+ x^{(1,j)}\Delta_x^{(1,j)} p_m(x_{j+1}) + x^{(2,j)}\Delta_x^{(2,j)} p_m(x_{j+2}) + \cdots \\ &+ x^{(m-1,j)}\Delta_x^{(m-1,j)} p_m(x_{j+m-1}) + x^{(m,j)}\Delta_x^{(m,j)} p_m(x_{j+m}) \end{aligned} \tag{3.22}$$

と表現される。確かに m 次多項式になっている。関数 $p_m(x)$ は m 次の多項式であるという仮定をしているが，この式は恒等式である。

演習問題 1 $p_2(x) = ax^2 + bx + c$ のとき，上式 (3.22) が恒等式であることを確かめよ (右辺と左辺を別々に計算してお互いに等しいことを示せ)。

ところで，この多項式 (3.22) の右辺の規準点 $x_{j+k}, k = 0, 1, 2, \cdots, m$ (全く任意に選ばれていることに注意する) は何を意味しているのだろうか？　今，$p_m(x)$ とは関係のない別の m 次の多項式 $q_m(x)$

$$q_m(x) = c_0 + c_1 x^{(1,j)} + c_2 x^{(2,j)} + c_3 x^{(3,j)} + \cdots + c_m x^{(m,j)} \tag{3.23}$$

を考える。x の n 重積 $x^{(n,j)} = \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_{j+k})$ の性質

$$x^{(n,j)}|_{x=x_{j+k}} = 0,\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \tag{3.24}$$

により, この式 (3.23) の x に x_j を代入すると,

$$q_m(x_j) = c_0 \tag{3.25}$$

となって多項式 $q_m(x)$ の定数 c_0 が決定される。次に, 式 (3.23) の両辺から $q_m(x_j) = c_0$ を引いて $x^{(1,j)} = (x - x_j)$ で割ると次式

$$\frac{q_m(x) - q_m(x_j)}{x - x_j} = c_1 + c_2 x^{(1,j+1)} + c_3 x^{(2,j+1)} + \cdots + c_m x^{(m-1,j+1)} \tag{3.26}$$

が得られる。左辺は $\Delta_x^{(1,j)} q_m(x)$ に等しいことに注意する。この式（3.26）の x に x_{j+1} を代入すると,

$$\Delta_x^{(1,j)} q_m(x_{j+1}) = c_1 \tag{3.27}$$

となって多項式 $q_m(x)$ の定数 c_1 が決定される。さらに式 (3.26) の両辺から $\Delta_x^{(1,j)} q_m(x_{j+1}) = c_1$ を引いて $x^{(1,j+1)} = (x - x_{j+1})$ で割ると次式

$$\frac{\Delta_x^{(1,j)} q_m(x) - \Delta_x^{(1,j)} q_m(x_{j+1})}{x - x_{j+1}} = c_2 + c_3 x^{(1,j+2)} + \cdots + c_m x^{(m-2,j+2)}$$

が得られる。左辺は $\Delta_x^{(2,j)} q_m(x)$ に等しいことに注意する。この式の x に x_{j+2} を代入すると,

$$\Delta_x^{(2,j)} q_m(x_{j+2}) = c_2 \tag{3.28}$$

となって多項式 $q_m(x)$ の定数 c_2 が決定される。この手続きを繰り返すと係数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ が, 次のように決定される。

$$c_0 = q_m(x_j), \tag{3.29}$$

$$c_1 = \Delta_x^{(1,j)} q_m(x_{j+1}), \tag{3.30}$$

$$c_2 = \Delta_x^{(2,j)} q_m(x_{j+2}), \tag{3.31}$$

$$\cdots$$

$$c_m = \Delta_x^{(m,j)} q_m(x_{j+m}) \tag{3.32}$$

したがって

$$q_m(x) \equiv q_m(x_j) + x^{(1,j)}\Delta_x^{(1,j)} q_m(x_{j+1}) + x^{(2,j)}\Delta_x^{(2,j)} q_m(x_{j+2}) + \cdots$$
$$+x^{(m-1,j)}\Delta_x^{(m-1,j)} q_m(x_{j+m-1}) + x^{(m,j)}\Delta_x^{(m,j)} q_m(x_{j+m}) \quad (3.33)$$

である。この式と $p_m(x)$ を表現する式 (3.22) を比べると $q_m(x)$ は $p_m(x)$ に等しい。ところで，係数 $c_k\ (k = 0,1,2,\cdots,m)$ を決めるために，$q_m(x)$ に $x = x_{j+k}, (k = 0,1,2,\cdots,m)$ を代入し，そのときの $q_m(x)$ の値を $q_m(x_{j+k})$ とした。$q_m(x)$ は 2 次元空間上の $m+1$ 個の点 $(x_{j+k}, q_m(x_{j+k})),\ k = 0,1,2,\cdots,m$ を通る m 次曲線を表している。したがって，多項式 (3.22) は 2 次元空間上の $m+1$ 個の点 $(x_{j+k}, p_m(x_{j+k})),\ k = 0,1,2,\cdots,m$ を通る m 次曲線を表している。この式 (3.22) がニュートンの差分商補間公式とよばれるものである。この公式では高次の差分商は低次の差分商を使って逐次的に計算でき，誤差の評価も剰余項を使って計算できる。

前章の始めに出した推理クイズ

問題 (x,y) 平面上に 6 点 $(-1,37),(2,14),(4,8),(5,2),(7,-1),(8,8)$ がデータとして与えられた。この 6 点を通る最小次の多項式 $f(x)$ を求めよ。

の答はニュートンの差分商補間公式

$$f_m(x) \equiv f_m(x_j) + x^{(1,j)}\Delta_x^{(1,j)} f_m(x_{j+1}) + x^{(2,j)}\Delta_x^{(2,j)} f_m(x_{j+2}) + \cdots$$
$$+x^{(m-1,j)}\Delta_x^{(m-1,j)} f_m(x_{j+m-1}) + x^{(m,j)}\Delta_x^{(m,j)} f_m(x_{j+m}) \quad (3.34)$$

または,

$$\begin{aligned} f(x) \equiv{} & f(x_j) + (x-x_j)f[x_j,x_{j+1}] + (x-x_j)(x-x_{j+1})f[x_j,x_{j+1},x_{j+2}] \\ & +(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},x_{j+3}] + \cdots \\ & +(x-x_j)(x-x_{j+1})\cdots(x-x_{j+n-2})f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n-1}] \\ & +(x-x_j)(x-x_{j+1})\cdots(x-x_{j+n-1})f[x_j,x_{j+1},x_{j+2},\cdots,x_{j+n}] \end{aligned} \quad (3.35)$$

を次のような表にして計算しているのである。与えられたデータ $x_j = -1, x_{j+1} = 2, x_{j+2} = 4, x_{j+3} = 5, x_{j+4} = 7, x_{j+5} = 8$ と $f(x_j) = -37, f(x_{j+1}) = 14, f(x_{j+2}) = 8, f(x_{j+3}) = 2, f(x_{j+4}) = -1, f(x_{j+5}) = 8$ から差分表を作る。

差分表

x	$f(x)$	$f[x_j, x_{j+1}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}]$	$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}]$
-1	-37				
		17			
2	14		-4		
		-3		1/2	
4	8		-1		0
		-6		1/2	
5	2		3/2		0
		$-3/2$		1/2	
7	-1		7/2		
		9			
8	8				

この表より

$$f[x_j, x_{j+1}] = 17, \tag{3.36}$$

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}] = -4, \tag{3.37}$$

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}] = \frac{1}{2}, \tag{3.38}$$

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}] = 0, \tag{3.39}$$

$$f[x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, x_{j+3}, x_{j+4}, x_{j+5}] = 0 \tag{3.40}$$

となるので，これらの結果を補間公式 (3.35) に代入して答は

$$f(x) = -37 + 17(x+1) - 4(x+1)(x-2) + \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(x-4) \tag{3.41}$$

$$= \frac{1}{2}(-16 + 44x - 13x^2 - x^3) \tag{3.42}$$

となる。

3.3 エルミートの補間公式

n 次のラグランジュの補間公式は $n+1$ 点で関数 $f(x)$ と一致する n 次の多項式 $p_n(x)$ である。さらに，この $n+1$ 点上で 1 階の導関数が $f'(x)$ と一致する多項式を考える。それらは $2n+2$ の条件式を満たす必要がある。そのため，この新しい多項式は $2n+1$ 次の多項式となる。この多項式は，ラグランジュ

補間と同様一意である。関数 $L_i(x)$ を使うと

$$\hat{p}_{2n+1}(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x)^2\{1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)\}f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} L_i(x)^2(x - x_i)f'(x_i) \tag{3.43}$$

と表現できる。確かにこの近似関数は $L_i(x_j) = \delta_{ij}$, $L_i(x_j)(x_j - x_i) = 0$ に注意すると

$$\hat{p}_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \tag{3.44}$$

を満たし,

$$\begin{aligned}\hat{p}'_{2n+1}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} 2L_i(x)L_i'(x)\{1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)\}f(x_i) \\ - \sum_{i=1}^{n} L_i(x)^2 2L_i'(x_i)f(x_i) + \sum_{i=1}^{n} 2L_i(x)L_i'(x)(x - x_i)f'(x_i) \\ + \sum_{i=1}^{n} L_i(x)^2 f'(x_i)\end{aligned} \tag{3.45}$$

より

$$\hat{p}'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \tag{3.46}$$

も満たしている。式 (3.43) をエルミートの補間公式という。

ラグランジュの補間公式をニュートンの差分商補間公式の形に書き換えたようにエルミートの補間公式も不等間隔差分商を使って書き換えられる。たとえば $n = 4$ のとき，差分商の恒等式

$$\begin{aligned}f(x) \equiv f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\ + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)f[x_0, x_1, x_2, x_3, x]\end{aligned} \tag{3.47}$$

で，点を重ねて $x_1 \to x_0, x_2 \to x_1, x_3 \to x_1$ とおくと，恒等式

$$\begin{aligned}f(x) \equiv f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_0] + (x - x_0)^2 f[x_0, x_0, x_1] \\ + (x - x_0)^2(x - x_1)f[x_0, x_0, x_1, x_1] \\ + (x - x_0)^2(x - x_1)^2 f[x_0, x_0, x_1, x_1, x]\end{aligned} \tag{3.48}$$

が得られる。ここで右辺の $f[x_0, x_0], f[x_0, x_0, x_1], \cdots$ は 2.10 節の拡張された差分商である。

これを一般化すると

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_0] + (x - x_0)^2 f[x_0, x_0, x_1] \\ +(x - x_0)^2(x - x_1)f[x_0, x_0, x_1, x_1] + \cdots \\ +(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2 f[x_0, x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n, x] \tag{3.49}$$

が得られる。この式で最後の剰余項を 0 とおくとラグランジュ補間公式と同じようにして，エルミートの補間公式は，次のようにも表現される。

$$\hat{p}_{2n+1}(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_0] + (x - x_0)^2 f[x_0, x_0, x_1] \\ +(x - x_0)^2(x - x_1)f[x_0, x_0, x_1, x_1] + \cdots \\ +(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots \\ (x - x_{n-1})^2(x - x_n)f[x_0, x_0, x_1, x_1, \cdots, x_n, x_n] \tag{3.50}$$

差分商の恒等式の対称性から，この式の右辺は引き数の入れ換えによって不変である。上式から明かなように，$\hat{p}_{2n+1}(x_0) = f(x_0), \hat{p}'_{2n+1}(x_0) = f[x_0, x_0] = \dfrac{df(x_0)}{dx_0}$ である。したがって $\hat{p}_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \hat{p}'_{2n+1}(x_i) = \dfrac{df(x_i)}{dx_i}$ である。

4

ライプニッツ則の応用

2 項係数

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{4.1}$$

を分解すると，関数の積 $g(x)h(x)$ に対するライプニッツ (Leibnitz) 則は，それぞれ

1. 微分の場合

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}g(x)}{dx^{n-k}}\ \frac{1}{k!}\frac{d^k h(x)}{dx^k} \tag{4.2}$$

2. 前進差分の場合

$$\frac{1}{n!}\Delta_{+x}^{n}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{(n-k)!}\Delta_{+x}^{n-k}g(x)\right]\ \frac{1}{k!}\Delta_{+x}^{k}h(x+(n-k)\epsilon) \tag{4.3}$$

3. $q-$差分の場合

$$\frac{1}{[n]_q!}\delta_{q,x}^{n}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{[n-k]_q!}\delta_{q,x}^{n-k}g(x)\ \frac{1}{[k]_q!}\ \delta_{q,x}^{k}h(q^{n-k}x) \tag{4.4}$$

4. 不等間隔差分商の場合

$$\Delta_x^{(n,j)}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n}[\Delta_x^{(n-k,j)}g(x)]\ [\Delta_x^{(k,j+n-k)}h(x)]_{x=x_{j+n-k-1}} \tag{4.5}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}[\Delta_x^{(k,j)}g(x)]\ [\Delta_x^{(n-k,j+k)}h(x)]_{x=x_{j+k-1}} \tag{4.6}$$

となる。これらの公式からいろいろな関係式，漸化式を導く。

4.1　2 項係数の関係式

ヴァンデルモンドのたたみ込み (Vandermonde's convolution) とよばれる 2 項係数の関係式

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{n-k}\binom{s}{k} \tag{4.7}$$

がある。

注　参考文献　翻訳書 1 の p.165 に「この式はヴァンデルモンド (Alexandre Vandermonde) が 17 世紀の後半にこの式について重要な論文を書いたからである。しかし，中国では早くも 1303 年には朱世傑 (Chu Shih-Chieh) によって知られていた。」との記述がある。 □

ヴァンデルモンドのたたみ込みは，式 (4.2)

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}g(x)}{dx^{n-k}}\ \frac{1}{k!}\frac{d^k h(x)}{dx^k} \tag{4.8}$$

に

$$g(x) = x^r, \tag{4.9}$$

$$h(x) = x^s \tag{4.10}$$

を代入すると得られる。なぜなら関係式

$$\frac{1}{k!}\frac{dx^r}{dx^k} = \binom{r}{k}x^{r-k} \tag{4.11}$$

より，上式の左辺

$$\frac{1}{(n)!}\frac{d^n}{dx^n}x^{r+s} = \binom{r+s}{n}x^{r+s-n} \tag{4.12}$$

となり，一方右辺は

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!}\frac{d^{n-k}x^r}{dx^{n-k}}\ \frac{1}{k!}\frac{d^k x^s}{dx^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{n-k}\binom{s}{k}x^{r+s-n} \tag{4.13}$$

となるからである。

関係式 (2.21) からわかるように 2 項係数$\binom{r}{k}$ は $k>r$ のとき 0 である。さらに $k<0$ のときも 0 と約束する。すなわち

$$\binom{r}{k}=0 \qquad k>r \text{ または } k<0 \text{ のとき} \tag{4.14}$$

とする。このように約束するとヴァンデルモンドのたたみ込みは k に対する条件 $0 \le k \le n$ がいらなくなって

$$\binom{r+s}{n}=\sum_k \binom{r}{n-k}\binom{s}{k} \tag{4.15}$$

と表現される。

ヴァンデルモンドのたたみ込みの $q-$ 差分化 ($q-$Vandermonde convolution) は式 (4.4) を使う。式 (4.7) を導いたのと全く同じやり方で

$$\binom{r+s}{n}_q=\sum_k \binom{r}{n-k}_q\binom{s}{k}_q q^{(n-k)(s-k)} \tag{4.16}$$

が得られる。この式 (4.16) の証明に必要な関係式は

$$\frac{1}{[k]_q!}\delta_{q,x}x^r=\binom{r}{k}_q x^{r-k} \tag{4.17}$$

だけである。ここで $\binom{r}{k}_q$ は $q-$差分化した 2 項係数 ($q-$binomial coefficient) で，$k<0$ または $k>r$ のとき 0，$0 \le k \le n$ のとき

$$\binom{r}{k}_q \equiv \frac{[r]_q!}{[k]_q![r-k]_q!} \tag{4.18}$$

と定義されている。ただし $[0]_q!=1$ である。

式 (4.16) の特別の場合 ($s=1$) として，2 項係数の関係式

$$\binom{r+1}{k}=\binom{r}{k}+\binom{r}{k-1} \tag{4.19}$$

は $q-$差分化されて

$$\binom{r+1}{k}_q=\binom{r}{k}_q+\binom{r}{k-1}_q q^{r-k+1} \tag{4.20}$$

となる。

注　$q-2$ 項係数を使うと次の関係式が成り立つ。交換関係

$$BA = qAB \tag{4.21}$$

を満たす演算子 A, B に対して $(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q A^{n-k} B^k \tag{4.22}$$

である。たとえば，$n = 2$ のとき

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + AB + BA + B^2 \\ &= A^2 + (1+q)AB + B^2 \\ &= A^2 + [2]_q AB + B^2 \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}_q A^{2-k} B^k \end{aligned} \tag{4.23}$$

である。□

演習問題 1　$q-$差分演算子$\delta_{q,x}$と x に対して次の関係式

$$\delta_{q,x} x - qx\delta_{q,x} = 1$$

が成立する。これを示せ。この式の意味は「x の任意関数 $f(x)$ に対して

$$\delta_{q,x} x f(x) - qx\delta_{q,x} f(x) = f(x)$$

が成り立つ」ということである。

さて演算子 A, B の交換関係 $[A, B]$ を次式で定義する。

$$[A, B] \equiv AB - BA \tag{4.24}$$

このとき，演算子$\dfrac{\partial}{\partial x}, x$ に対して次の交換関係

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}, x\right] = 1 \tag{4.25}$$

が成立する。この式の意味は「x の任意関数 $f(x)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x} x f(x) - x\frac{\partial}{\partial x} f(x) = f(x) \tag{4.26}$$

が成り立つ」ということである。

演習問題 2　ライプニッツの公式 (4.2) を使って演算子 $\dfrac{\partial^n}{\partial x^n}, x$ に対して次の交換関係

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}, x\right] = n\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}$$

を示せ。

演習問題 3

$$f(x) = (x^2-1)^{\frac{1}{2}}$$

とする。$x > 1$ のとき，$n \geq 1$ に対して

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{正} & \cdots n \text{ が奇数のとき} \\ \text{負} & \cdots n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

が成立する。ただし $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ である。たとえば $x > 1$ のとき

$$f^{(1)}(x) = \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

である。ライプニッツの公式 (4.2) を使って証明せよ (証明には少し工夫が必要である)。

4.2　スターリング数の漸化式

第 1 章で求めた上昇階乗べき関数 $x^{\overline{n}}$ は次式

$$x^{\overline{n}} = x(x+\epsilon)(x+2\epsilon)\cdots(x+(n-1)\epsilon) \tag{4.27}$$

で表される。この式を x^r で展開する。

$$x^{\overline{n}} = \sum_{r=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \epsilon^{n-r} x^r \tag{4.28}$$

ここで展開係数 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} (r = 1, 2, \cdots, n)$ は第 1 種スターリング数 (Stirling numbers of the first kind) とよばれている。

注　これはスターリング (James Stirling,1692–1770) にちなんで名づけられた。第 1 種と第 2 種のスターリング数があり，スターリング数を表現する記号としていろいろ

ある。ここではスターリング数と 2 項係数 $\binom{n}{r}$ との類似性や記号の拡張性 (新しいスターリング数を導入するとき) を考慮して第 1 種を $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ で，第 2 種を $\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}$ と表記する。□

上昇階乗べき関数 $x^{\overline{n}}$ ではなく，下降階乗べき関数 $x^{\underline{n}}$ の展開係数を第 1 種スターリング数とよんで次の記号 S_r^n で表すこともある。

$$x^{\underline{n}} = \sum_{r=1}^{n} S_r^n \epsilon^{n-r} x^r \tag{4.29}$$

さて $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ を具体的に求める。

$$x^{\overline{1}} = x \tag{4.30}$$

$$x^{\overline{2}} = x(x+\epsilon) = x^2 + x\epsilon \tag{4.31}$$

$$x^{\overline{3}} = x(x+\epsilon)(x+2\epsilon) = x^3 + 3x^2\epsilon + 2x\epsilon^2 \tag{4.32}$$

$$\cdots$$

であるから

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1, \tag{4.33}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \tag{4.34}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \tag{4.35}$$

$$\cdots$$

である。

n が大きいときの $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ の値を計算するために $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ の漸化式を求めよう。そのために，まず $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ の微分による表示式を求める。

$x^{\overline{n}}$ は x の n 次の多項式であるので，多項式のテーラー展開式

$$x^{\overline{n}} = \sum_{r=1}^{n} \frac{x^r}{r!} \left. \frac{d^r}{dx^r} x^{\overline{n}} \right|_{x=0} \tag{4.36}$$

と式 (4.28) を比較して

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \epsilon^{-n+r} \frac{1}{r!} \left. \frac{d^r}{dx^r} x^{\overline{n}} \right|_{x=0} \tag{4.37}$$

を得る。この式より

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = 0 \qquad (r > n) \tag{4.38}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (n > 0) \tag{4.39}$$

である。

上昇階乗べき関数 $x^{\overline{n}}$ の関係式

$$x^{\overline{n+1}} = x(x+\epsilon)\cdots(x+(n-1)\epsilon)(x+n\epsilon) \tag{4.40}$$

$$= x^{\overline{n}}\ (x+n\epsilon) \tag{4.41}$$

を使うと式 (4.37) より

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = \epsilon^{-n-1+r} \frac{1}{r!} \left. \frac{d^r}{dx^r} x^{\overline{n+1}} \right|_{x=0} \tag{4.42}$$

$$= \epsilon^{-n-1+r} \frac{1}{r!} \left. \frac{d^r}{dx^r} x^{\overline{n}}\ (x+n\epsilon) \right|_{x=0} \tag{4.43}$$

である。ここでライプニッツ則を使うと

$$= \epsilon^{-n-1+r} \left\{ \frac{1}{r!} (\frac{d^r}{dx^r} x^{\overline{n}})(x+n\epsilon) + \frac{1}{(r-1)!} (\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} x^{\overline{n}}) \frac{d}{dx}(x+n\epsilon) \right\}_{x=0} \tag{4.44}$$

$$= n \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} \tag{4.45}$$

を得る。したがって

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix} \quad (\text{整数}\ \ n > 0\ ) \tag{4.46}$$

となる。これが第 1 種スターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ の漸化式である。n が小さいとき $\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$ の値は簡単に計算できるので，この漸化式を使うと n が大きいとき $\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}$ の値が得られる。

次に x^n を下降階乗べき関数 $x^{\underline{r}}$ で表す。

$$x^n = \sum_{r=1}^{n} \left\{ {n \atop r} \right\} \epsilon^{n-r} x^{\underline{r}} \tag{4.47}$$

展開係数$\left\{ {n \atop r} \right\}$ を第 2 種スターリング数 (Stirling numbers of the second kind) という。定義式

$$x^{\underline{1}} = x \tag{4.48}$$

$$x^{\underline{2}} = x(x-\epsilon) \tag{4.49}$$

$$x^{\underline{3}} = x(x-\epsilon)(x-2\epsilon) \tag{4.50}$$

$$\cdots$$

より，$x, x^2, x^3, \cdots$ を求めると

$$x = x^{\underline{1}} \tag{4.51}$$

$$x^2 = x^{\underline{2}} + \epsilon x^{\underline{1}} \tag{4.52}$$

$$x^3 = x^{\underline{3}} + 3\epsilon x^{\underline{2}} + \epsilon^2 x^{\underline{1}} \tag{4.53}$$

$$\cdots$$

を得る。したがって

$$\left\{ {1 \atop 1} \right\} = 1 \tag{4.54}$$

$$\left\{ {2 \atop 2} \right\} = 1, \qquad \left\{ {2 \atop 1} \right\} = 1 \tag{4.55}$$

$$\left\{ {3 \atop 3} \right\} = 1, \qquad \left\{ {3 \atop 2} \right\} = 3, \qquad \left\{ {3 \atop 1} \right\} = 1 \tag{4.56}$$

$$\cdots$$

である。

第 2 種スターリング数 $\left\{ {n \atop r} \right\}$ の漸化式を求めよう。そのために，まず $\left\{ {n \atop r} \right\}$ の差分による表示式を求める。x の n 次の多項式の前進差分による展開式 (2.68)

$$x^n = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^{\underline{r}}}{r!} \, \Delta_{+x}^{r} x^n \Big|_{x=0} \tag{4.57}$$

と式 (4.47) を比較して

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = \epsilon^{r-n} \frac{1}{r!} \left. \Delta_{+x}^{r} x^{n} \right|_{x=0} \tag{4.58}$$

を得る。この式より

$$\left\{ {n \atop r} \right\} = 0 \qquad (r > n) \tag{4.59}$$

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0 \qquad (n > 0) \tag{4.60}$$

である。さて表現式

$$\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = \epsilon^{r-n-1} \frac{1}{r!} \left. \Delta_{+x}^{r} x^{n+1} \right|_{x=0} \tag{4.61}$$

に対してライプニッツ則を使うと

$$\begin{aligned} &= \epsilon^{r-n-1} \left\{ \frac{1}{r!} (\Delta_{+x}^{r} x^{n})(x + r\epsilon) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{(r-1)!} (\Delta_{+x}^{r-1} x^{n}) \Delta_{+x} x \right\}_{x=0} \\ &= \left\{ {n \atop r} \right\} r + \left\{ {n \atop r-1} \right\} \end{aligned} \tag{4.62}$$

を得る。したがって

$$\left\{ {n+1 \atop r} \right\} = r \left\{ {n \atop r} \right\} + \left\{ {n \atop r-1} \right\} \quad (\text{整数} \ \ n > 0\ ) \tag{4.63}$$

となる。これが第 2 種スターリング数 $\left\{ {n \atop r} \right\}$ の漸化式である。

さて，上昇階乗べき関数 $x^{\overline{n}}$ と下降階乗べき関数 $x^{\underline{n}}$ は，ϵ を $-\epsilon$ に置き換えることによって互いに移り変わることに注意すると，上昇階乗べき関数 $x^{\overline{n}}$ の展開式 (4.28) より，下降階乗べき関数 $x^{\underline{n}}$ の展開式

$$x^{\underline{n}} = \sum_{r=1}^{n} \left[{n \atop r} \right] (-1)^{n-r} \epsilon^{n-r} x^{r} \tag{4.64}$$

を得る。

x のべき乗の下降階乗べき関数 $x^{\underline{n}}$ による展開式 (4.47)

$$x^n = \sum_{r=1}^{n} \left\{ {n \atop r} \right\} \epsilon^{n-r} x^{\overline{r}} \tag{4.65}$$

と下降階乗べき関数 $x^{\underline{n}}$ の展開式 (4.64) を組み合わせると二重和

$$x^n = \sum_{r=1}^{n} \left\{ {n \atop r} \right\} \epsilon^{n-r} x^{\underline{r}} = \sum_{r,k} \left\{ {n \atop r} \right\} \left[{r \atop k} \right] (-1)^{r-k} \epsilon^{n-k} x^k \tag{4.66}$$

を得る。この式は任意の x に対して成り立つので x のべき乗の 1 次独立性によりその係数は 0 になる。したがって，次の式が成り立つ。

$$\sum_{r} \left\{ {n \atop r} \right\} \left[{r \atop k} \right] (-1)^{r-k} = \begin{cases} 0 & \text{整数 } n, k \geq 0,\ n \neq k \\ 1 & \text{整数 } n, k \geq 0,\ n = k \end{cases} \tag{4.67}$$

ところで， n が大きな自然数のとき， x の n 乗の和 $\sum_{x=1}^{N} x^n$ の計算は難しい。しかし，第 2 種スターリング数を使って x^n を下降階乗べき $x^{\underline{r}}$ で展開すると，$x^{\underline{r}}$ の和 $\sum_{x=1}^{N} x^{\underline{r}}$ は，次のように計算できる $(\epsilon = 1)$。

$$\sum_{x=1}^{N} x^{\underline{r}} = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{r+1} \Delta_{+x} x^{\underline{r+1}} \tag{4.68}$$

$$= \frac{1}{r+1} [(N+1)^{\underline{r+1}} - 1^{\underline{r+1}}] \tag{4.69}$$

2 項係数 $\binom{n}{r}$ は， n 個の要素の中から r 個の要素をとる組合せの数という組合せ論的意味があるように，第 1 種スターリング数 $\left[{n \atop r} \right]$ や第二種スターリング数 $\left\{ {n \atop r} \right\}$ にも組合せ論的意味がある。第一種スターリング数 $\left[{n \atop k} \right]$ は n 個の要素で k 個のサイクルを作る場合の数を与えている。サイクルは頭と尻尾がつながっているので，次のような 3 文字の作るサイクル

$$[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b] \tag{4.70}$$

はすべて等しいとみなす。しかし

$$[a, b, c] \neq [a, c, b] \tag{4.71}$$

である。したがって，3 個の要素で 1 個のサイクルを作る場合の数は $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$ となる。同様に 3 個の要素で 2 個のサイクルを作る作り方は，次の 3 通り

$$[a]\ [b, c], \qquad [b]\ [c, a], \qquad [c]\ [a, b]$$

であるので $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3$ となる。さらに，4 個の要素で 1 個のサイクルを作る作り方は次の 6 通り

$$[a, b, c, d], \qquad [a, b, d, c], \qquad [a, c, b, d], \qquad [a, c, d, b], \qquad [a, d, b, c], \qquad [a, d, c, b]$$

であるので $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 6$ となる。同様に，4 個の要素で 2 個のサイクルを作る作り方は次の 11 通り

$$[a]\ [b, c, d], \qquad [b]\ [c, d, a], \qquad [c]\ [d, a, b], \qquad [d]\ [a, c, b]$$
$$[a]\ [b, d, c], \qquad [b]\ [c, a, d], \qquad [c]\ [d, b, a], \qquad [d]\ [a, b, c]$$
$$[a, b]\ [c, d], \qquad [a, c]\ [b, d], \qquad [a, d]\ [b, c]$$

であるので $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$ である。これらの例が示しているのは，第 1 種スターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ が「n 個の要素で k 個のサイクルを作る場合の数」を表していることである。

次に，第 2 種スターリング数 $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ は「n 個の要素からなる集合を k 個の空でない部分集合に分ける場合の数」を表していることを説明する。たとえば 3 個の要素 $\{a, b, c\}$ を二つに分割すると

$$\{a\}\ \{b, c\}, \qquad \{b\}\ \{c, a\}, \qquad \{c\}\ \{a, b\}$$

となるので $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 3$ である。次に 4 個の要素 $\{a, b, c, d\}$ を二つに分割すると

$$\{a\}\ \{b, c, d\}, \qquad \{b\}\ \{a, c, d\}, \qquad \{c\}\ \{a, b, d\}, \qquad \{d\}\ \{a, b, c\}$$
$$\{a, b\}\ \{c, d\}, \qquad \{a, c\}\ \{b, d\}, \qquad \{a, d\}\ \{b, c\} \tag{4.72}$$

となるので$\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$である。これらの例は，第2種スターリング数$\left\{ {n \atop k} \right\}$が「$n$個の要素からなる集合を$k$個の空でない部分集合に分ける場合の数」を表していることを示している。

演習問題 4 次の和を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{N} n^3$$

演習問題 5 次の式を示せ。

1. $\left[{n \atop n} \right] = 1$
2. $\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$
3. $\left\{ {n \atop n} \right\} = \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$
4. $\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \qquad (n \geq 2)$

演習問題 6 反転公式

$$f(n) = \sum_{k} \left[{n \atop k} \right] (-1)^k g(k) \tag{4.73}$$

$$g(n) = \sum_{k} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^k f(k) \tag{4.74}$$

を示せ。

演習問題 7 次の関係式を導け。

$$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_{k} \left[{n \atop k} \right] \binom{k}{m} \tag{4.75}$$

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_{k} \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\} \tag{4.76}$$

5

差分方程式

5.1　差分方程式の例

例 1a　等差数列

数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ において，x_n と x_{n+1} の公差が一定数 d のとき，この数列は等差数列とよばれ関係式

$$x_{n+1} - x_n = d \tag{5.1}$$

を満たす。差分記号 Δ_{+n} を使うとこの式は

$$\Delta_{+n} x_n = d \tag{5.2}$$

と表される。この式を一階線形差分方程式という。初項 x_0 を与えると一般項 x_n は

$$x_n = x_0 + nd \tag{5.3}$$

と表される。この表現式を差分方程式の解とよび，x_0 を差分方程式の初期値とよぶ。

例 1b　数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ において，隣あう数列の差 $\{x_{n+2} - x_{n+1}\}$ と差 $\{x_{n+1} - x_n\}$ の差が定数 d_0 のとき，この数列は関係式

$$x_{n+2} - x_{n+1} - (x_{n+1} - x_n) = d_0 \tag{5.4}$$

または

$$\Delta_{+n}^2 x_n = d_0 \tag{5.5}$$

を満たす。この式は 2 階線形差分方程式である。一般項 x_n は

$$x_n = a_0 + b_0 n + \frac{d_0}{2} n^2 \tag{5.6}$$

と表される。2 個の任意定数 a_0, b_0 を含む解を線形差分方程式 (5.5) の一般解とよぶ。

例 1c　平面の分割

問題　平面上にある直線は平面を二つの領域に分ける。どの 2 直線も互いに平行でなく，またどの 3 直線も 1 点で交わることがないような n 本の直線があるとき，これらの n 本の直線によって分けられた領域の数を x_n とする。x_n を求めよ。

答　直線の数が少ないとき，実際に紙の上に図を書いて分割される領域の数を調べてみる。n 個の直線によって分割される領域の数を x_n とすると，$n=1$ のときは $x_1 = 2$ である。$n = 2$ のときは $x_2 = 4$ である。$n = 3$ のときは $x_3 = 7$ である。$n = 4$ のときは複雑で，4 番目の直線はすでに存在する 3 本の直線と 3 点で交差する。別の見方をすると，これらの交点によって 4 番目の直線は 2 個の線分と 2 個の半直線に分断されている。これらの線分や半直線はすでに分割されている 7 個の領域をそれぞれ二分するので，新しくできる領域の数は 4 個だけ増えることになる。合計 $x_4 = x_3 + 4 = 11$ である。この考え方を一般化すると，$n-1$ 個の直線がすでに平面を分割しているとき，n 番目の直線はすでにある直線と $n-1$ 個の点で交差する。これらの交点によって n 番目の直線は $n-2$ 個の線分と 2 個の半直線に分断されている。これらの線分や半直線はすでに分割されている領域をそれぞれ二分するので，新しくできる領域の数は n 個だけ増えることになる。したがって，漸化式 (差分方程式) は

$$x_n = x_{n-1} + n, \qquad n \geq 2, \quad x_1 = 2 \tag{5.7}$$

または後退差分演算子 Δ_{-n} を使って

$$\Delta_{-n} x_n = n, \qquad n \geq 2, \quad x_1 = 2 \tag{5.8}$$

となる。この差分方程式 (5.8) の解は上昇べき関数 $n^{\overline{2}} = n(n+1)$ を使って

$$x_n = \frac{n(n+1)}{2} + c, \qquad c \text{ は定数} \tag{5.9}$$

となる。初期値 $x_1 = 2$ より定数は $c = 1$ である。しがって，解 x_n は

$$x_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \tag{5.10}$$

となる。

例 2a 複利計算

年利率 r% で元金 x_0 円を預金した。1 年後の元利合計 x_1 は

$$x_1 = x_0\left(1 + \frac{r}{100}\right) \tag{5.11}$$

になる。2 年後の元利合計 x_2 は

$$x_2 = x_1\left(1 + \frac{r}{100}\right) \tag{5.12}$$

$$= x_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \tag{5.13}$$

となる。n 年後の元利合計 x_n は

$$x_n = x_0\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n \tag{5.14}$$

で与えられる。このとき x_{n+1} と x_n は 1 階の線形差分方程式

$$x_{n+1} = x_n\left(1 + \frac{r}{100}\right) \tag{5.15}$$

または

$$\Delta_{+n}x_n = \frac{r}{100}x_n \tag{5.16}$$

を満たす。この方程式の解は式 (5.14) で与えられる。

例 2b 変動利率

年利率 r が毎年変動するとき，年ごとの年利率を $r_k, k = 0, 1, \cdots$ とすると，元金 x_0 に対する 1 年後の元利合計 x_1 は

$$x_1 = x_0\left(1 + \frac{r_0}{100}\right) \tag{5.17}$$

になる。2 年後の元利合計 x_2 は

$$x_2 = x_1\left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \tag{5.18}$$

$$= x_0\left(1 + \frac{r_0}{100}\right)\left(1 + \frac{r_1}{100}\right) \tag{5.19}$$

となる。一般に n 年後の元利合計 x_n は

$$x_n = x_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{r_k}{100}\right) \tag{5.20}$$

で与えられる。このとき x_{n+1} と x_n は 1 階の線形差分方程式

$$x_{n+1} = x_n \left(1 + \frac{r_n}{100}\right) \tag{5.21}$$

または

$$\Delta_{+n} x_n = \frac{r_n}{100} x_n \tag{5.22}$$

を満たす。この方程式の解は式 (5.20) で与えられる。

例 2c 月利率

年利率 r% の年ごとの利息を月ごとの利息に変えるとどうなるだろうか？月利率は自然に $\frac{r}{12}$ と考えると 1 年後の元利合計 x_1 は

$$x_1 = x_0 \left(1 + \frac{r}{100 \cdot 12}\right)^{12} \tag{5.23}$$

になる。さらに月ごとの利息を日歩 (1 日ごとの利息) に変えると 1 年後の元利合計 x_1 は

$$x_1 = x_0 \left(1 + \frac{r}{100 \cdot 365}\right)^{365} \tag{5.24}$$

となる。一般に，利息を 1 年間で N 回 (等間隔で) 受け取ると仮定すると，1 年後の元利合計 x_1 は

$$x_1 = x_0 \left(1 + \frac{r}{100 \cdot N}\right)^{N} \tag{5.25}$$

で与えられる。

N を非常に大きくして“連続的”に利息を受け取ると仮定すると，1 年後の元利合計 x_1 は

$$x_1 = x_0 \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{r}{100 \cdot N}\right)^{N} \tag{5.26}$$

$$= x_0 e^{\frac{r}{100}} \tag{5.27}$$

で与えられる。一般に t 年後の元利合計 $x(t)$ は

$$x(t) = x_0 e^{\frac{r}{100} t} \tag{5.28}$$

で与えられる。このとき $x(t)$ は差分方程式ではなく 1 階の微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{r}{100}x(t) \tag{5.29}$$

を満たす。

例 3 n 段の階段を上がるのに，ひと足で 1 段または 2 段上がるものとする。その上がり方の数を x_n とする。x_n の漸化式を求めよ。ただし $n < 0$ のとき $x_n = 0, x_0 = 0$ とする。

$n = 1$ のときは 1 段上がるより仕方がないから $x_1 = 1$ である。$n = 2$ のときは 1 段ずつ上がるか，2 段を一度に上がるかで $x_2 = 2$ である。$n = 3$ のときは 1 段ずつ上がるか，最初に一足で 2 段を上ってから後で 1 段上がるか，最初に 1 段を上ってから後で一足で 2 段上がるかの 3 通りであるので $x_3 = 3$ である。これを続けると数列 $\{1, 2, 3, 5, 8, 13 \cdots\}$ が得られる (この計算には忍耐力と注意力が必要である)。この数列をじっと眺めると次の関係式

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \qquad n \geq 2 \tag{5.30}$$

または

$$\Delta_{+n}^2 x_n + \Delta_{+n} x_n - x_n = 0, \qquad n \geq 0 \tag{5.31}$$

に気がつく。関係式がわかると式の説明は容易である。n 段上がったとすると，最後の上がり方は，$n-1$ 段目から 1 段上がったか，$n-2$ 段目から 1 足で 2 段上がったかの 2 通りしかない。$n-1$ 段目までの上がり方は x_{n-1} 通りで，$n-2$ 段目までの上がり方は x_{n-2} 通りであるので x_n 段の上がり方はこの二つの和 $x_{n-1} + x_{n-2}$ になる。この差分方程式の解法は 5.5.1項で勉強する。

演習問題 1 次の関係式の空白 $\boxed{}$ を数値で埋めよ。ただし関係式の中には正しくない式もある。式が正しくない場合には理由を述べよ。

1. 集合 $[n] = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ の部分集合 (空集合を含む) の個数を x_n とする。x_n を x_{n-1} を用いて表せ。

$$x_n = \boxed{}\, x_{n-1}, \quad n > 1$$

2. 集合 $[n] = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ の部分集合で，隣り合った数を含まないものの個数を x_n とする。x_n を x_{n-1}, x_{n-2} を用いて表せ。

$$x_n = \boxed{}\, x_{n-1} + \boxed{}\, x_{n-2}, \quad n > 2$$

3. ある国では毎年都会の人口の 3% が田舎に移住し，田舎の人口の 5% が都会に移住しているという。現在の都会の人口を x_n，来年の人口を x_{n+1} とする。また，現在の田舎の人口を y_n，来年の人口を y_{n+1} とする。x_{n+1}, y_{n+1} を x_n, y_n を用いて表せ。

$$x_{n+1} = \boxed{}\, x_n + \boxed{}\, y_n$$

$$y_{n+1} = \boxed{}\, x_n + \boxed{}\, y_n$$

4. 1 円玉，5 円玉，10 円玉の硬貨がたくさんあるとき，これらの硬貨で n 円を作る組み合わせの数を x_n とする。x_n の漸化式を求めよ。ただし，$n<0$ のとき $x_n = 0, x_0 = 1$ とする。

$$x_n = \boxed{}\, x_{n-10} + \boxed{}\, x_{n-5} + 1$$

5. n 人が 1 列に並んでいる。この n 人の並び方を変えて，どの人も新しく並んだ位置がもとの位置か，またはすぐ隣になるようにしたい。いまこのような並べ方が x_n 通りあるとする。ただし，全員が動かない並び方も 1 通りとして数えるものとする。x_n の漸化式を求めよ。ただし，$n<0$ のとき $x_n = 0, x_0 = 0$ とする。

$$x_n = \boxed{}\, x_{n-1} + \boxed{}\, x_{n-2}$$

6. 数字 1, 2, 3 を n 個並べてできる n 桁の数全体を考える。そのうち 1 が奇数回現れるものの個数を x_n，1 が偶数回現れるか全く現れないものの個数を y_n とする。$n \geq 1$ のとき x_{n+1}, y_{n+1} を x_n, y_n を用いて表せ。

$$x_{n+1} = \boxed{}\, x_n + \boxed{}\, y_n$$

$$y_{n+1} = \boxed{}\, x_n + \boxed{}\, y_n$$

2 1. 次式

$$x_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n-k}{k}$$

で定義される x_n は，差分方程式

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$$

を満たすことを示せ。

2. 次の和を求めよ。

$$1.\quad y_n = \sum_{k=1}^{N} q^k$$

$$2.\quad y_n = \sum_{k=1}^{N} kq^k$$

ヒント　$y_n - qy_n$ を計算するか，$q\dfrac{dq^k}{dq} = kq^k$ を使って微分と和の順序を入れ換える。

5.2　微分方程式と差分方程式

5.2.1　微分方程式

連続変数 x の関数 $y(x)$ を考えて，その導関数を

$$y'(x) = \frac{dy}{dx},\ y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots,\ y^{(k)} = \frac{d^ky}{dx^k} \tag{5.32}$$

で表す。一般に $y, y', y'', \cdots$ を含む等式

$$F\left(x, y, y', \cdots, y^{(k)}\right) = 0 \tag{5.33}$$

を微分方程式 (differential equation) という。微分方程式に含まれる導関数の最高階数を微分方程式の階数 (order) という。微分方程式が y とその導関数について有理整式であるとき，最高階の導関数の次数を微分方程式の次数 (degree) という。すべての $y, y', y'', \cdots, y^{(k)}$ について次数が同じ方程式を 斉次（せいじ） (homogeneous) または同次 (homogeneous) 方程式という。

例

$$y''^2 + y^2 + y^4 = 0, \qquad 2\text{ 階 }2\text{ 次微分方程式} \tag{5.34}$$

$$y''^2 + y^2 + y^2 = 0, \qquad 2\text{ 階斉次微分方程式} \tag{5.35}$$

$$y''''^3 + y^3 + y^6 = 0, \qquad 4\text{ 階 }3\text{ 次微分方程式} \tag{5.36}$$

1 次の微分方程式のうちで，すべての $y, y', y'', \cdots, y^{(k)}$ について 1 次式になっているものを線形微分方程式という。2 次以上の項が一つでも含まれている式は非線形微分方程式という。

例

$$y' + p(x)y = r(x), \qquad \text{1 階線形微分方程式} \tag{5.37}$$

$$y'' + p(x)y + q(x)y = 0, \qquad \text{2 階線形斉次微分方程式} \tag{5.38}$$

$$y'' + p(x)y + q(x)y = r(x), \qquad \text{2 階線形微分方程式} \tag{5.39}$$

$$y' = cy(1-y), \qquad \text{1 階非線形微分方程式} \tag{5.40}$$

k 階線形斉次微分方程式の一般形は $a_0(x)a_k(x) \neq 0$ のとき,

$$a_0(x)y^{(k)} + a_1(x)y^{(k-1)} + \cdots + a_k(x)y = 0 \tag{5.41}$$

である。

線形斉次微分方程式の最も重要な性質は解の重ね合わせができることである。解の重ね合わせとは，式 (5.41) の一つの解を y_1 別の解を y_2 とすると，すなわち

$$a_0(x)y_1^{(k)} + a_1(x)y_1^{(k-1)} + \cdots + a_k(x)y_1 = 0 \tag{5.42}$$

$$a_0(x)y_2^{(k)} + a_1(x)y_2^{(k-1)} + \cdots + a_k(x)y_2 = 0 \tag{5.43}$$

であるとき，上の式に定数 c_1 を掛け下の式に定数 c_2 を掛けて二つの式を加えると新しい式

$$a_0(x)\left(c_1y_1^{(k)} + c_2y_2^{(k)}\right) + a_1(x)\left(c_1y_1^{(k-1)} + c_2y_2^{(k-1)}\right) + \cdots + a_k(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$$

が得られる。この式は $y = c_1y_1 + c_2y_2$ が解になっている (解の重ね合わせができる) ことを示している。これに対して非線形微分方程式では二つの解 y_1 と y_2 を重ね合わせたもの $y = c_1y_1 + c_2y_2$ は解ではない。このことが非線形微分方程式を面白くしているし，解を求めることを困難にしている。

微分方程式に含まれる最高階の微係数について解けた形の微分方程式

$$y^{(k+1)} = f\left(y, y', y'', \cdots, y^{(k)}\right) \tag{5.44}$$

を正規型 (normal form) とよぶ。最高階の微係数について解けていない形の微分方程式を非正規型という。

5.2.2 差分方程式

このテキストでは差分間隔が不等間隔のときを考慮した広い意味の差分方程式を扱うが，通常差分方程式とよばれるものは,『差分間隔を等間隔 (たとえばϵ)

にとり，規準点 $x=n\epsilon$ (n は整数) の上で定義された関数 $y(x)$ に対する方程式」という狭い意味に限定している。次の定義は狭い意味の差分方程式の定義である。

$y(x)$ の k 次差分をたとえば前進差分演算子を使って $\Delta^k_{+x}y(x)$ と表す。微分方程式の定義と同じように，等式

$$F\left(x, y(x), \Delta_{+x}y(x), \Delta^2_{+x}y(x), \cdots, \Delta^k_{+x}y(x)\right) = 0 \tag{5.45}$$

を (狭い意味の) 差分方程式とよぶ。差分間隔が 1 のとき ($\epsilon = 1$)，式 (5.45) を

$$F(n, y_n, \Delta_{+n}y_n, \Delta^2_{+n}y_n, \cdots, \Delta^k_{+n}y_n) = 0 \tag{5.46}$$

または

$$F\left(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{n+k}\right) = 0 \tag{5.47}$$

と表現する。この形式 (5.47) では差分方程式が使われる演算子の種類 (前進差分，後退差分，中心差分) に関係なく表現されている。微分方程式 ($\epsilon \to 0$) を意識しているときは式 (5.45) を使い，そうでない場合は式 (5.47) を使うことが多い。

微分方程式の階数の定義に従って，差分方程式 (5.45) の階数を次のように定義する。その方程式に含まれる高次差分 $\Delta^k_{+n}y_n$ の次数 k の最大値と最小値の差を方程式の階数 k という。差分方程式 (5.47) では y_k のインデックス k の最大値と最小値の差を階数と定義する。

差分方程式がすべての $y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \cdots, y_{n+k}$ について 1 次式になっているとき，この差分方程式を線形差分方程式 (linear difference equation) という。線形斉次差分方程式では線形斉次微分方程式のときと同じように解の重ね合わせができる。1 次式になっていない場合は非線形差分方程式 (non-linear difference equation) という。非線形差分方程式では解の重ね合わせができない。

最大のインデックス $n+k$ をもつ y_{n+k} について解けた形の差分方程式

$$y_{n+k} = f\left(y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+k-1}\right) \tag{5.48}$$

を正規型とよぶ。そうでない場合を非正規型という。

組み合わせ理論では正規型の差分方程式，たとえば次式の形のもの

$$y_{n+1} = f\left(y_0, y_1, \cdots, y_n\right) \tag{5.49}$$

を漸化式とよび，数値計算の差分法では同じ形の差分方程式を陽的 (explicit) スキームとよんでいる。

5.3 差分方程式の初期値問題と境界値問題

N 階の正規型差分方程式

$$y_{n+N} = f(y_n, y_{n+1}, \cdots, y_{n+N-1}) \tag{5.50}$$

で，引き続いた N 個の点での y_n の値，たとえば

$$y_0 = a_0,\ y_1 = a_1,\ y_2 = a_2,\ \cdots, y_{N-1} = a_{N-1} \tag{5.51}$$

が指定されたとき，式 (5.50) の解でこの条件 (これを初期条件 (initial conditions) という) を満たす関数を求める問題を初期値問題という。

式 (5.50) の解で初期条件 (5.51) を満たす解は一意的に定まる。これを初期値問題の解の一意性という。これは説明の必要がないほど明かである。式 (5.50) により $n=0$ のとき，式 (5.50) の右辺は初期条件より一定の値をとるので y_N が定まる。この y_N を使うと，$n=1$ のとき式 (5.50) の右辺の値が定まるので y_{N+1} も同様に定まる。この y_{N+1} を使うと y_{N+2} も同様に定まる $\cdots$。これを繰り返すと任意の n に対する y_{N+n}，$(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ が一意的に決定される。したがって， N 階の正規型差分方程式は N 個の初期条件を与えると解は一意的に定まる。

しかし，引き続いた N 個の点での y_n の値ではなく，離れた 2 点での y_n の値，たとえば y_0 と y_N が指定されたとき式 (5.50) の解でこの条件 (これを境界条件 (boundary conditions) という) を満たす関数を求める問題を境界値問題という。境界値問題では解の一意性は必ずしも成立しない。

初期値問題も境界値問題も差分方程式を解くということでは同じであるが，解く目的が全く違っている。

初期値問題では n の小さいときの y_n の値を知って n が大きいときの y_n の値が知りたいという要求がある。たとえば組合せ問題では n の小さいときの組合せ数 y_n は簡単に計算できるが，n が大きいときの組合せ数 y_n は，直接計算するのが非常に難しいので，差分方程式 (漸化式) を解いて間接的に n の大きい値での y_n を求める。また，ある量 y_n の値が将来どうなるかを知りたいときには，現在のデータ $y_0, y_1, \cdots$ を使って将来の (n の大きい値での) y_n を予測したりする。

一方，境界値問題では n は空間の広がりを示すことが多く，空間の外側の値 (境界値) より内部の値を推定したり，境界値が指定されたとき解が存在するためには，方程式に含まれるパラメータ (固有値) の値がどんな値をとればよいかなどに興味がある。

微分方程式の解法と比較すると差分方程式の解法はほとんど進歩していない

といってもよい。進歩しなかった理由の一つは，差分方程式の解はコンピュータを利用した数値解が簡単に求められるため厳密解を知る必要性がそれほどなかったためである。

しかし，数値解はあくまで近似的なものであるし，数値解をどんなに蓄積しても差分方程式に対する理解が深まるとは思えない。あらゆるものがデジタル化される情報化社会では，アナログ量を記述する微分方程式に代わってデジタルな差分方程式がますます重要になってくる。差分方程式を深く理解するには，どうしても厳密な理論的結果が必要になる。近い将来解法が発展すると予想されるが，ここでは良く知られている差分方程式の解法を以下に列記する。

1. 微分方程式の解法を拡張して差分方程式を解く。
2. 母関数 (generating function) の方法，あるいは $z-$変換の方法を使う。これはラプラス変換法の差分版である。
3. まず数値解を求め。数値解を表現する数式をカンで探し出す。その表現式が厳密解になっているかどうかは後で証明する。これは微分方程式の解法にはない差分方程式独自の方法である。

5.4　1 階線形差分方程式の解法

この節では 1 階線形差分方程式の解法を学ぶ。まず 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x) = 0 \tag{5.52}$$

の解法を復習する。

(I)　$p(x) = 0$
式 (5.52) で $p(x) = 0$ の場合.

$$\frac{du}{dx} + q(x) = 0 \tag{5.53}$$

解は簡単に積分できて

$$u(x) = -\int_0^x q(x')dx' + c, \qquad c \text{ は積分定数} \tag{5.54}$$

となる。

式 (5.52) で $q(x)=0$ の場合.

$$\frac{dz}{dx}+p(x)z=0 \tag{5.55}$$

を斉次または同次方程式とよんでいる。式 (5.52) は非斉次 (non-homogeneous) または非同次 (non-homogeneous) 方程式とよぶ。

(II) $q(x)=0$

$q(x)=0$ のとき式 (5.55) の解は

$$z(x)=A\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) \tag{5.56}$$

で与えられる。

(III) 1階線形非同次微分方程式

$q(x)\neq 0$ のとき非斉次微分方程式 (5.52) の解は定数変化法 (variation of parameters) を使って求められる。この方法はすでに求められた斉次方程式の解 (5.56)

$$z(x)=A\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) \tag{5.57}$$

と非斉次方程式の解はそんなに違ってはいない，違いはせいぜい定数 A が変化する程度であろうと仮定して，定数 A を x の関数 $a(x)$ で置き換えて $a(x)$ を求める方法である。

$$y=a(x)z(x), \tag{5.58}$$

$$z(x)=\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) \tag{5.59}$$

とおいて非斉次微分方程式 (5.52)

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+q(x)=0 \tag{5.60}$$

に代入する。関係式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{da(x)}{dx}z(x)-a(x)p(x)z(x) \tag{5.61}$$

に注意すると，式 (5.60) から新しい関数 $a(x)$ に対する微分方程式

$$z(x)\frac{da}{dx}+q(x)=0 \tag{5.62}$$

または

$$\frac{da}{dx} = -\frac{q(x)}{z(x)} \tag{5.63}$$

が得られる。この式は積分できて

$$a(x) = -\int_0^x \frac{q(x')}{z(x')}\,dx' + c, \qquad c \text{ は積分定数} \tag{5.64}$$

となるので，これを式 (5.58) に代入して非斉次微分方程式 (5.52) の一般解が斉次方程式の解 $z(x)$ を使って

$$y(x) = cz(x) - z(x)\int_0^x \frac{q(x')}{z(x')}\,dx' \tag{5.65}$$

と求められた。

次に1階線形差分方程式

$$\Delta_{+x}y(x) + p(x)y + q(x) = 0 \tag{5.66}$$

を考える。この式は $y = n\epsilon$, n は整数，$y(x) = y_n, q(x) = q_n$ とおくと

$$y_{n+1} - y_n + \epsilon(p_n y_n + q_n) = 0 \tag{5.67}$$

となる。

(I)　$p(x) = 0$
式 (5.66) で $p(x) = 0$ とおくと

$$\Delta_{+x}y(x) + q(x) = 0 \tag{5.68}$$

または,

$$y_{n+1} - y_n + \epsilon q_n = 0 \tag{5.69}$$

になる。この式の n の値を変えると

$$y_n - y_{n-1} + \epsilon q_{n-1} = 0 \tag{5.70}$$

$$y_{n-1} - y_{n-2} + \epsilon q_{n-2} = 0 \tag{5.71}$$

$$\cdots$$

$$y_1 - y_0 + \epsilon q_0 = 0 \tag{5.72}$$

となるので，これらの式の和を作ると

$$y_n = y_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon q_n \tag{5.73}$$

が得られる。これが差分方程式 (5.69) の解である。

(II) $q(x) = 0$

式 (5.66) で $q(x) = 0$ の場合

$$\Delta_{+x} z(x) + p(x) z = 0 \tag{5.74}$$

を微分方程式の場合にならって斉次または同次方程式とよんでいる。式 (5.52) は非斉次または非同次方程式とよぶ。

斉次方程式 (5.74) は $x = n\epsilon$ (n は整数) , $p(x) = p_n$, $z(x) = z_n$ とおくと

$$z_{n+1} - z_n + \epsilon p_n z_n = 0 \tag{5.75}$$

または

$$z_{n+1} = (1 - \epsilon p_n) z_n \tag{5.76}$$

と表現される。この式 (5.76) は例 2b 変動利率の差分方程式 (5.21) と同じ方程式であるので解は

$$z_n = A \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \epsilon p_k) \tag{5.77}$$

で与えられる。この解は関係式

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \epsilon p_k) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} \log(1 - \epsilon p_k) \right) \tag{5.78}$$

を使うと $\epsilon \to 0$ の極限では

$$\lim_{\epsilon \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \log(1 - \epsilon p_k) = \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} -\epsilon p_k \tag{5.79}$$

$$= -\int_0^x p(x) dx \tag{5.80}$$

となるので 解 (5.77) は $\epsilon \to 0$ の極限で解 (5.56) に一致する。

(III)　1 階線形非斉次差分方程式

$$\Delta_{+x}y(x) + p(x)y + q(x) = 0 \tag{5.81}$$

の解法について述べる。$q(x) \neq 0$ のとき式 (5.81) の解は微分方程式の場合と同様にして定数変化法を使って求められる。この方法はすでに求められた斉次方程式の解

$$z_n = A\prod_{k=0}^{n-1}(1 - \epsilon p_k) \tag{5.82}$$

で，定数 A を n の関数 a_n で置き換えて a_n を求める方法である。

$$y_n = a_n z_n, \tag{5.83}$$

$$z_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \epsilon p_k) \tag{5.84}$$

とおき，これらを非斉次差分方程式 (5.67)

$$y_{n+1} - y_n + \epsilon(p_n y_n + q_n) = 0 \tag{5.85}$$

に代入して，関係式

$$z_{n+1} = z_n(1 - \epsilon p_n) \tag{5.86}$$

に注意すると，式 (5.66) は新しい関数 a_n に対する差分方程式

$$a_{n+1}z_{n+1} - a_n z_{n+1} + \epsilon r_n = 0 \tag{5.87}$$

または

$$a_{n+1} - a_n + \frac{\epsilon r_n}{z_{n+1}} = 0 \tag{5.88}$$

を得る。この式は式 (5.75) と同じ式であるので解は

$$a_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\epsilon q_k}{z_{k+1}} + c \qquad c \text{ は積分定数} \tag{5.89}$$

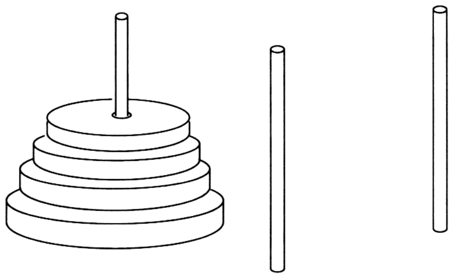


図 5.1 ハノイの塔

となる。これを式 (5.82) に代入すると，非斉次差分方程式 (5.66) の一般解は

$$y_n = cz_n - z_n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon q_k}{z_{k+1}}, \tag{5.90}$$

$$z_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \epsilon p_k) \tag{5.91}$$

と表現される。

例 ハノイの塔の問題

問題 図 5.1に示すように，底が一番大きく上へいくほどだんだん小さくなっていく n 個の円環が木釘にはめてある。これらの環を一度に 1 個ずつ動かしながら，別の木に移そうと思う。環を一時的においておくために，もう 1 本の木釘が利用できる。環を動かす途中で小さい環の上に大きい環をおくことができないとすると，これらの環を別の木釘に元と同じ形に移すには何回環を動かせばよいか？

答 環の数が少ないとき，実際に (頭の中で) 動かして回数を調べてみる。n 個の環を 1 本の木釘から別の木釘に移すのに必要な置き換えの回数を x_n とすると，$n = 1$ のときは $x_1 = 1$ である。$n = 2$ のときは $x_2 = 3$ である。$n = 3$ のときは少し面倒で，上の 2 枚を第 3 の木釘に移動させるのに 3 回 ($x_2 = 3$) 必要である。3 枚目を第 2 の木釘に移動させるのに 1 回必要である。第 2 の木釘に残りの 2 枚を移動させるのに再び 3 回 ($x_2 = 3$) 必要である。したがって，合計 $x_3 = x_2 + 1 + x_2 = 7$ である。

この考え方を一般化すると，n 個環を移すのに，まず上の $n-1$ 個の環を第

3 の木釘に移動させる。そして一番大きい環を第 2 の木釘に移動させる。最後に，第 3 の木釘にある $n-1$ 個の環を第 2 の木釘に移動させる。したがって，漸化式

$$x_n = 2x_{n-1} + 1 \tag{5.92}$$

が得られる。次にこの差分方程式 (5.92) の解 x_n を求める。

蛇足　カンの良い人は x_n の数列 $1, 3, 7, \cdots$ から解 $x_n = 2^n - 1$ を見抜くかもしれない。カンの善し悪しは研究者にとって最も大切な素質の一つであるのでカンを磨くのも大切であるが，現在までに蓄積された数学的知識を知らないと無駄な時間を浪費することが多い。□

この差分方程式の解は公式 (5.91) を使うとすぐに得られるが，公式を暗記するのではなく公式をよく理解するため，もう一度具体例を使って解を求める。まず，同次式

$$z_n = 2z_{n-1} \tag{5.93}$$

の解を求めると，

$$z_n = A2^{n-1} \qquad A \text{ は定数} \tag{5.94}$$

である。定数変化法によって A を a_n とおき，$x_n = a_n 2^{n-1}$ を式 (5.92) に代入すると a_n に対する差分方程式

$$a_n 2^{n-1} = a_{n-1} 2^{n-1} + 1 \tag{5.95}$$

または

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \tag{5.96}$$

が得られる。この式の解は

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^{k-1}} \tag{5.97}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \tag{5.98}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \tag{5.99}$$

となるので

$$x_n = a_n 2^{n-1} \tag{5.100}$$

$$= 2^n - 1 \tag{5.101}$$

が解になる。

演習問題 3 次の差分方程式を解け。

1. $ny_n - (n+1)^2 y_{n-1} = 0, \quad y_1 = 1$
2. $y_n - y_{n-1} = nq^n, \quad y_0 = 0,$ （qは定数）
3. $y_n - y_{n-1} = a_{n+2} - a_n, \quad y_0 = 0,$ $(a_0 = a_1 = 0)$
4. $y_n - y_{n-1} = (b_{n+3} - b_n)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right), \quad y_0 = 0,$ $(b_1 = b_2 = 0)$
5. $y_{n+1} - ay_n = b, \quad y_0 = 1,$ （a, b は定数）
6. $y_{n+1} - 2y_n = 2^n, \quad y_0 = 1$
7. $y_n + 2y_{n-1} = n, \quad y_0 = 1$
8. $y_{n+1} - ny_n = (n+1)!, \quad y_1 = 0$

演習問題 4 次の差分方程式で任意定数 c_0, c_1 を含む解 (一般解) を求めよ。

$$(n+1)y_{n+2} - (2n+1)y_{n+1} + ny_n = 0$$

この問題は一見 2 階差分方程式に見えるが，新しい従属変数 z_n を導入すると 1 階差分方程式に帰着される。

5.5 2 階線形差分方程式の解法

この節では 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \tag{5.102}$$

や 2 階線形差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 z(x) + p(x)\Delta_{+x} z(x) + q(x)z(x) = r(x) \tag{5.103}$$

の解法を勉強する。$p(x), q(x), r(x)$ は x のどんな関数かはわかっている (既知である) とする。

式 (5.102), (5.103) で $r(x) = 0$ の場合，

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0 \tag{5.104}$$

$$\Delta_{+x}^2 z(x) + p(x)\Delta_{+x} z(x) + q(x)z(x) = 0 \tag{5.105}$$

を斉次方程式という。これに対して，式 (5.102), (5.103) を非斉次方程式という。

5.5.1　定数係数の 2 階線形斉次差分方程式の解法

まず，定数係数の 2 階線形斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = r(x), \qquad p, q \text{ は定数} \tag{5.106}$$

の解法を勉強する。

天下りに『定数係数の斉次微分方程式の解は指数関数の形

$$z = e^{\lambda x} \tag{5.107}$$

で表される。』と仮定する。

これを代入すると式 (5.104) は

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0 \tag{5.108}$$

となる。

$e^{\lambda x} \neq 0$ であるから λ に対する代数方程式

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{5.109}$$

が得られる。この式を特性方程式 (characteristic equation) という。

解は

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-p + \sqrt{p^2 - 4q}\right) \tag{5.110}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-p - \sqrt{p^2 - 4q}\right) \tag{5.111}$$

である。

(i)　特性方程式の解が二つあるとき ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

斉次微分方程式 (5.104) の独立な解は $\{\exp(\lambda_2 x), \exp(\lambda_1 x)\}$ の二つである。

一般解は解の重ね合わせによって (任意パラメータ c_1, c_2 を使って)

$$z(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{5.112}$$

と表せる。

(ii) 特性方程式の解が重解であるとき ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda,\ p^2 - 4q = 0$)

斉次微分方程式 (5.104) の一つの解は $c\exp(\lambda x)$ である。

もう一つの解を求めるために定数変化法を使う。定数 c が x の関数 $c(x)$ である

$$z(x) = c(x)e^{\lambda x} \tag{5.113}$$

と仮定して斉次微分方程式 (5.104) に代入すると

$$\frac{d^2c}{dx^2}e^{\lambda x} + 2\frac{dc}{dx}\lambda e^{\lambda x} + c\lambda^2 e^{\lambda x} + p\frac{dc}{dx}e^{\lambda x} + p\,c\lambda e^{\lambda x} + q\,c\,e^{\lambda x} = 0 \tag{5.114}$$

となる。ここで，条件式，$\lambda = -\frac{p}{2}$, $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ を使うと， $c(x)$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2c(x)}{dx^2} = 0 \tag{5.115}$$

が得られる。この式の解は任意パラメータ a, b を使って

$$c(x) = ax + b \tag{5.116}$$

と表される。

したがって，特性方程式の解が重解のとき，独立な解は $\{e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x}\}$ の二つのである。式 (5.104) の一般解は

$$z(x) = (ax + b)e^{\lambda x} \tag{5.117}$$

で与えられる。

注 特性方程式の解が重解であるかないかで，微分方程式の解の表現が全く違うように見えるが,

$$\text{(i)}\quad z(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{5.118}$$

$$\text{(ii)}\quad z(x) = (ax + b)e^{\lambda x} \tag{5.119}$$

は，実は (ii) は (i) の特別の場合である。

これを明らかにするために，まず $q = \frac{1}{4}(p^2 - {\delta_1}^2)$ とおく。δ_1 は新しいパラメータである。$\lim_{\delta_1 \to 0}$ で特性方程式の解は重解になる。このとき，特性方程式は

$$\lambda^2 + p\lambda + \frac{1}{4}(p^2 - {\delta_1}^2) = 0 \tag{5.120}$$

となり，解は

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-p + \delta_1), \tag{5.121}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(-p - \delta_1) \tag{5.122}$$

となる。

したがって，微分方程式の独立な解は $\exp\left[\frac{1}{2}(-p+\delta_1)x\right]$，$\exp\left[\frac{1}{2}(-p-\delta_1)x\right]$ の二つである。

この解の重ね合わせによって，次の独立な二つの解を構成する。

$$\text{(i)} \quad z_1(x) = c_1 e^{-\frac{p}{2}x}\left(e^{\delta_1 x} + e^{-\delta_1 x}\right) \tag{5.123}$$

$$\text{(ii)} \quad z_2(x) = c_2 e^{-\frac{p}{2}x}\left(e^{\delta_1 x} - e^{-\delta_1 x}\right) \tag{5.124}$$

解 (5.123) は極限 $\lim_{\delta_1 \to 0}$ で普通の解 $z_1(x) = 2c_1 e^{-\frac{p}{2}x}$ になる。一方，解 (5.124) は，このままであると極限 $\lim_{\delta_1 \to 0}$ で 0 になる。

しかし， c_2 は任意定数であるので $c_2 \to c_2/\delta_1$ と置き換えると，極限 $\lim_{\delta_1 \to 0}$ で解 $z_2(x) = 2c_2 x e^{-\frac{p}{2}x}$ になる。

これが重解のときに定数変化法を使って得られたもう一つの独立な解である。 □

次に，定数係数の 2 階線形斉次差分方程式の解法を勉強する。

定数係数の斉次差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 z(x) + p\Delta_{+x} z(x) + qz(x) = 0 \tag{5.125}$$

を考える。この式は $x = n\epsilon$ とおいて書き直すと

$$z_{n+2} - 2\left(1 - \frac{1}{2}p\epsilon\right) z_{n+1} + \left(1 - p\epsilon + q\epsilon^2\right) z_n = 0 \tag{5.126}$$

となる。さらに係数を

$$b_1 = 1 - \frac{1}{2}p, \tag{5.127}$$

$$b_2 = 1 - p\epsilon + q\epsilon^2 n \tag{5.128}$$

と置き換えて

$$z_{n+2} - 2b_1 z_{n+1} + b_2 z_n = 0 \tag{5.129}$$

と表す。

式 (5.129) の解は，微分方程式での指数関数の形

$$z(x) = e^{\lambda x} = e^{\lambda n \epsilon} = \left(e^{\lambda \epsilon}\right)^n \tag{5.130}$$

から

$$z_n = (\beta)^n \tag{5.131}$$

と推定される。これを代入すると式 (5.129) は

$$\beta^2 - 2b_1\beta + b_2 = 0 \tag{5.132}$$

となる。この式が差分の場合の特性方程式である。

解は

$$\beta_1 = b_1 + \sqrt{{b_1}^2 - b_2}, \tag{5.133}$$

$$\beta_2 = b_1 - \sqrt{{b_1}^2 - b_2} \tag{5.134}$$

である。元のパラメータに戻すと

$$\beta_1 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon + \epsilon\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 1 + \lambda_1\epsilon, \tag{5.135}$$

$$\beta_2 = 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 1 + \lambda_2\epsilon \tag{5.136}$$

となる。

(i)　特性方程式の解が二つあるとき ($\beta_1 \neq \beta_2$)

斉次差分方程式 (5.129) の独立な解は $\{{\beta_1}^n, {\beta_2}^n\}$ の二つである。一般解は，解の重ね合わせによって (任意パラメータ c_1, c_2 を使って)

$$z_n = c_1{\beta_1}^n + c_2{\beta_2}^n \tag{5.137}$$

$$= c_1(1 + \lambda_1\epsilon)^n + c_2(1 + \lambda_2\epsilon)^n \tag{5.138}$$

(5.139)

と表せる。

$n = x/\epsilon$ と置き換えると，極限操作 $\lim_{\epsilon \to 0}$ によって差分方程式の解は微分方程式の解

$$z(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{5.140}$$

になる。

(ii)　特性方程式の解が重解であるとき $(\beta_1 = \beta_2 = \beta,\ {b_1}^2 - b_2 = 0)$

斉次差分方程式 (5.129) の一つの解は $c\,\beta^n$ である。

もう一つの解を求めるために，微分方程式の場合と同じように定数変化法を使う。

定数 c が n の関数 c_n である

$$z_n = c_n \beta^n \tag{5.141}$$

と仮定して斉次微分方程式 (5.129) に代入し条件式，$\beta = -b_1,\ {b_1}^2 - b_2 = 0$ を使うと c_n に対する差分方程式

$$\Delta^2_{+n} c_n = 0 \tag{5.142}$$

が得られる。

この式の解は，任意パラメータ $a,\ b$ を使って

$$c_n = an + b \tag{5.143}$$

と表される。

したがって，特性方程式の解が重解のとき，独立な解は $\{\beta^n,\ n\beta^n\}$ の二つのである。式 (5.129) の一般解は

$$z_n = (an + b)\beta^n \tag{5.144}$$

で与えられる。

この解も，$\lim_{\epsilon \to 0}$ の極限で微分方程式の解

$$z(x) = (ax + b)e^{\lambda x} \tag{5.145}$$

になる。

例 1a　フィボナッチ数列

フィボナッチ (Fibonacci,1170-1240) は 1202 年に次の問題を提出した (M. ケッヒャー著・長岡昇男訳「数論的古典解析」シュプリンガー・フェアラーク東京 1996 年, p18)

『隔絶された囲いの中に一つがいの兎がいたとき 1 年たってこの一つがいの兎の子孫が合わせて何つがいいるかを知りたい。ただし一つがいの親兎は月に一つがいの子兎を産むとし，子兎は生後 2ヵ月で子を産めるようになるとする。』

すぐわかるように最初の年においては $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144$ なる数の列が得られる。1611 年にケプラーはこの数列が漸化式

$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, \qquad f_1 = 1,\ f_2 = 1 \tag{5.146}$$

を満たすことを注意した。数列 $f = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に現れる数はフィボナッチ数とよばれる。—以下省略—

この漸化式の特性方程式は

$$p^2 - p - 1 = 0 \tag{5.147}$$

であり，解は

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{5.148}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5.149}$$

の二つである。したがって，一般解 f_n は

$$f_n = c_1{\lambda_1}^n + c_1{\lambda_2}^n \tag{5.150}$$

で表される。

初期条件 $f_1 = 1,\ f_2 = 1$ より，任意定数 $c_1,\ c_2$ を決める方程式

$$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1, \tag{5.151}$$

$$c_1{\lambda_1}^2 + c_2{\lambda_2}^2 = 1 \tag{5.152}$$

が得られ，これを解いてフィボナッチ数列 f_n を表現する式

$$f_n = \frac{{\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{5.153}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{5.154}$$

が求められる。

前述の本「数論的古典解析」によればこの式は 1843 年フランスの数学者ビネ (P.M.Binet,1786-1856) によって証明されたそうである。

蛇足 どんなにカンがよくても数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \cdots$ からこの数列の表現式 (5.153) を自力で導ける人はいないと思う (線形微分方程式の解法を知って

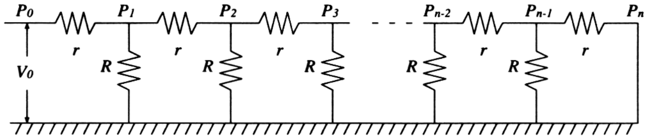


図 5.2　並列抵抗 R と直列抵抗 r をもつ梯子型電気回路 1

いれば別だが)。無理数 $\sqrt{5}$ を使って自然数を表すことを思いつくことは難しい。1622 年のケプラーによる差分方程式の発見からビネの解まで 232 年もかかっているのである。□

例 1b　梯子型抵抗回路での電位分布

図 5.2のような梯子型の電気回路を考える。

節点 P_k の電位を V_k(ボルト) とする。また節点 P_k と P_{k+1} を結ぶ抵抗を r (オーム)，そこを流れる電流を I_{k+1} (アンペア) とし，節点 P_k とアースを結ぶ抵抗を R (オーム)，そこを流れる電流を i_k (アンペア) とする。節点 P_n は直接アース (接地) されているので $V_n = 0$ である。

節点 P_0 での電位 V_0 (ボルト) が与えられているとき，電位 V_k $(k = 1, 2, \cdots n-1)$ の値を V_0 で表せ。

オームの電流・電位則より，関係式

$$V_k = V_{k+1} + rI_{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-2 \tag{5.155}$$

$$I_k = I_{k+1} + \frac{V_k}{R}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{5.156}$$

が成り立つ。式 (5.155) より関係式

$$V_{k+1} - 2V_k + V_{k-1} = r(I_k - I_{k+1}) \tag{5.157}$$

が得られるので，この式に式 (5.156) を代入すると電位 V_k に対する 2 階線形斉次差分方程式

$$V_{k+1} - 2V_k + V_{k-1} = \frac{r}{R}V_k, \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{5.158}$$

が得られる。

一般解は特性方程式

$$\mu - 2 + \mu^{-1} = \frac{r}{R} \tag{5.159}$$

の解 μ_1, μ_2 によって

$$V_k = c_1{\mu_1}^k + c_2{\mu_2}^k \tag{5.160}$$

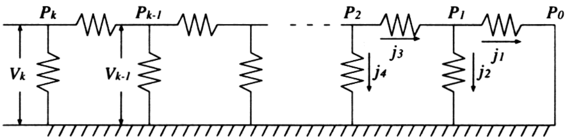


図 5.3 並列抵抗 R と直列抵抗 r をもつ梯子型電気回路 1

と表現される。

任意定数 c_1, c_2 は電位に対する条件式

$$V_0 = c_1 + c_2, \tag{5.161}$$

$$V_n = c_1 {\mu_1}^n + c_2 {\mu_2}^n = 0 \tag{5.162}$$

により決められる。したがって，解は次式で与えられる。

$$V_k = V_0 \frac{{\mu_1}^{k-n} - {\mu_2}^{k-n}}{{\mu_1}^{-n} - {\mu_2}^{-n}}, \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{5.163}$$

例 1c スケーリング法 1

同じ問題を発想を逆転させて解く。

そのためにすべての電流を新しい記号 j で表し，通し番号 k を逆順に割り付ける。終端の節点 P_0 を流れる電流を j_0 とし，図 5.3のように電源の方へ向かって $j_1, j_2, j_3, \cdots$ と番号を増やしていく。節点 P_k の電位を V_k とする。

簡単のため抵抗値を $R = r = 1$ (オーム) とする。逆転した発想というのは，最初に終端の電流 $j_0(= j_1)$ を 1 (アンペア) だと仮定するのである (当然のことであるがこの仮定は間違っている)。この仮定を使うと電流の計算が非常に簡単になる。

抵抗がすべて 1 オームであるので $j_2 = j_1$ となる。電流則より

$$j_3 = j_2 + j_1 \tag{5.164}$$

であり，電位則より

$$v_2 = j_4 \cdot 1 = (j_3 + j_2) \cdot 1 \qquad \text{(ボルト)} \tag{5.165}$$

であるので電流の関係式

$$j_4 = j_3 + j_2 \tag{5.166}$$

が得られる。

一般に電流・電位則より漸化式

$$j_{k+2} = j_{k+1} + j_k \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.167}$$

が成り立つ。これを解いて電流 $\{j_k\}$ は簡単に $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots\}$ と求められるが，この数列はフィボナッチ数列そのものである。

電源の電位は

$$V_n = j_{2n} \tag{5.168}$$

で与えられる。たとえば $n = 4$ のとき $V_4 = j_8 = 21$ であるが，この値は与えられた電位 V と一致していない。

そこで，最初に仮定した終端の電流の値 i_0 のスケールを変えて (この場合は $\dfrac{V}{21}$ 倍して) 全体の電位が正しくなるように補正するのである (スケーリング法)。

この計算法は一見おかしいようにみえるが数学的にも正しいやり方である。

問題にしている差分方程式が線形斉次差分方程式であるので，解の重ね合わせができるのである。一つの解を定数倍したものも正しい解である。

スケール定数 C は n を固定すると，V_n はフィボナッチ数列を表現する式 (5.153) より

$$V_n = C \frac{{\lambda_1}^{2n} - {\lambda_2}^{2n}}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{5.169}$$

によって決められ，電位分布 V_k も式 (5.153) より

$$V_k = C \frac{{\lambda_1}^{2k} - {\lambda_2}^{2k}}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{5.170}$$

$$= V_n \frac{{\lambda_1}^{2k} - {\lambda_2}^{2k}}{{\lambda_1}^{2n} - {\lambda_2}^{2n}} \tag{5.171}$$

で与えられる。$R = r = 1$ のとき式 (5.159) より

$$\mu_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \tag{5.172}$$

$$\mu_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \tag{5.173}$$

となり，一方フィボナッチ数列の特性方程式の解は

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{5.174}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5.175}$$

であるので，関係 $\mu_1 = {\lambda_1}^2, \mu_2 = {\lambda_2}^2$ が成立する。

したがって，この表現式 (5.171) は，すでに求めた電位分布の式 (5.163) に等しい (番号の付け方を除いて)。

蛇足　このスケーリング法の起源は非常に古くエジプトのパピルスに記述されている次の問題の解答にもこの方法が使われている (ペートル・ベックマン『π の歴史』田尾陽一，清水韶光訳，蒼樹書房 1971 年, p.17)。 □

問題　ある量とその 1/7 との和が，19 になるという。その量とはいくらか？

答　7 という量を仮定しよう。(まず) その量は，7 である。(そしてその量の)1/7 は，1 である。(この結果) 全体は，8 となる。(だがこれは正しい答ではない。そこで) 8 にある数をかけて，19 にしなければならない。ちょうど，それと同じ数を 7 にかければ，必要な数が得られる。したがって，解は $7 \times \frac{19}{8}$ となる。この記述は，スケーリング法を適用して次の線形斉次代数方程式

$$x + \frac{x}{7} = 19 \tag{5.176}$$

の解が得られることを示している。

例 2　差分スキーム

正規型の 1 階の微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = t_0 \tag{5.177}$$

を数値計算するための差分スキームを考える。

例 2a オイラー法

左辺の微分を前進差分で置き換えると

$$\Delta_{+t} y = f(t, y) \tag{5.178}$$

または $t = t_n = t_0 + n\delta, y_n = y(t_n)$ (n は整数) とおくと

$$y_{n+1} = y_n + \delta f(t_n, y_n) \tag{5.179}$$

となる。これはオイラー法とよばれる差分スキームである。

計算は $y_0 = y(t_0)$ から出発して，段階的に進む。まず $t = t_1 = t_0 + \delta$ における式 (5.177) の解 y の近似値 y_1 を式 (5.179) を使って計算する。次に $t = t_2 = t_0 + 2\delta$ での近似値 y_2 を式 (5.179) を使って計算する。以下，この手順を繰り返すと，任意の時間 $t_n = t_0 + n\delta$ における y_n の近似値 y_n が計算できる。

微分方程式の真の解 y_{n+1} のテーラー展開の式

$$y_{n+1} = y_n + \delta y_n' + \frac{\delta^2}{2!} y_n'' + \cdots \tag{5.180}$$

と比較するとオイラー法で求めた近似値は δ の 1 次の項まで一致しているので，この差分スキームの打ち切り誤差は δ^2 のオーダーになる (しかし，時間 t までの計算回数が δ に反比例するので，t までの累積打ち切り誤差は，実質的に δ のオーダーになる)。

例 2b　誤差の増殖 (差分スキームの不安定性)

オイラー法は近似が悪いので打ち切り誤差がより少ない中心差分 Δ_t で左辺の微分を置き換えると，次の差分スキーム (中点法)

$$y_{n+1} - y_{n-1} = 2\delta f(t_n, y_n) \qquad \text{(中点公式)} \tag{5.181}$$

が得られる。

この計算法は簡単で精度も良い方法であるが，このままでは計算誤差が増殖して恐ろしい癌症状を示す結果を与える。

このことを理解するために，簡単な微分方程式

$$\frac{dy(t)}{dt} = -y(t), \quad y(0) = 1 \tag{5.182}$$

を考える。解は $y(t) = e^{-t}$ である。

この微分方程式に差分スキーム (5.181) を適用すると

$$y_{n+2} = y_n - 2\delta y_{n+1}, \quad y_0 = 1 \tag{5.183}$$

となる。このスキームは 2 階の線形斉次差分方程式であり，初期値は y_0 と y_1 の二つ必要になる。$y_0 = 1$ であるが，y_1 は別の方法で計算して初期値として与える。

数値計算の結果 ($\delta = 0.2$) は，図 5.4に示すように初めは厳密解と同じように減少しているが，$t = 3$ くらいから振動が激しくなる。

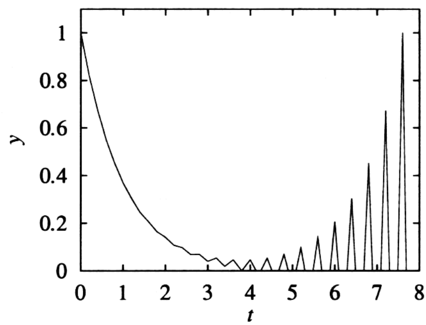


図 5.4 不安定な差分スキーム

この振動は y_1 の数値を変えても，差分間隔 δ を小さくしても t がある程度大きくなると必ず起こる現象で，一般に差分スキームの不安定性とよばれている。

この現象を解析するために式 (5.183) の一般解を求めると

$$y_n = c_1{\alpha_1}^n + c_2{\alpha_2}^n \tag{5.184}$$

となる。ここで

$$\alpha_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2+1} < 1, \tag{5.185}$$

$$\alpha_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2+1} < -1 \tag{5.186}$$

である。

真の解は $y = e^{-t} = \left(e^{-\delta}\right)^n$ であり，これを近似するのが解 (5.184) の第 1 項である。

ところが，解 (5.184) は無縁解 $c_2{\alpha_2}^n$ を含んでいる。$\alpha_2 < -1$ であるので n が大きくなるとこの解は激しく振動する。

数学的には初期値 $y_0 = 1$ より $c_2 = 0$ であるが，実際には初期値のわずかな誤差や，計算誤差により，非常に小さな c_2 であっても， n が大きくなるとこの無縁解 $c_2{\alpha_2}^n$ の方が真の解を近似する第 1 項 $c_1{\alpha_1}^n$ より大きくなって，真解と全く異なる振動現象を引き起こすのである。

これは癌細胞が増殖して正常な細胞を滅ぼす現象によく似ている。

中点法だけでは不安定性があるので，これを除くために台形公式と組み合わせた中点・台形法がある。

この方法では各ステップで補助的な値$\tilde{y}_{n+1}$を

$$\tilde{y}_{n+1} = y_{n-1} + 2\delta f(x_n, y_n), \qquad \text{(中点法)} \tag{5.187}$$

により，まず計算する。

次に新しい値 y_{n+1} を

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\delta}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})] \qquad \text{(台形法)} \tag{5.188}$$

で計算する。

この方法を微分方程式 (5.182) に適用すると

$$\tilde{y}_{n+1} = y_{n-1} - 2\delta y_n, \tag{5.189}$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{\delta}{2}[y_n + \tilde{y}_{n+1}] \tag{5.190}$$

となる。この 2 式より y_n に対する差分方程式

$$y_{n+1} = \left(1 - \frac{\delta}{2} - \delta^2\right) y_n - \frac{\delta}{2} y_{n-1} \tag{5.191}$$

が得られる。この方程式の一般解は式 (5.184) と同じ形であるが，無縁解 $c_2\alpha_2^n$ に対する α_2 はほぼ $\frac{\delta}{2}$ になり，n が大きくなると 0 に収束して消えてしまうので，不安定性を生じない。

例 2c　スケーリング法 2

e^{-t} を計算する次の差分方程式

$$y_{n+2} = y_n - 2\delta y_{n+1}, \quad y_0 = 1 \tag{5.192}$$

は簡単で近似の程度も良い計算法を与えるが，特性方程式の解の一つの絶対値が 1 より大きくなる ($|\alpha_2| > 1$)。このため，不適切な差分スキームとして有名である。

しかし，特性方程式の解の絶対値が 1 より大きくなる差分スキームは本当にダメなスキームなのだろうか？

たとえば増加関数 e^t を計算する次の差分スキーム

$$y_{n+2} = y_n + 2\delta y_{n+1}, \quad y_0 = 1 \tag{5.193}$$

を考える。計算してみると特性方程式の解の一つの絶対値は 1 より大きい。これは当然で，増加関数では n が大きいとき y_n は大きくなる。

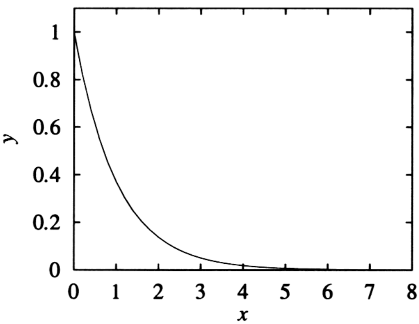


図 5.5 スケーリング法を適用した差分スキーム

一方，減少関数 e^{-t} も視点を変えると増大関数に見える。すなわち，t の大きいところから原点 $t=0$ の方を眺めるとこの関数は増大関数 e^{t} に見える。この状況は例 1.c の計算法によく似ている。そこでは，最初に終端の電流の値を仮定して逆順に電源の電位を計算し，その後終端の電流をスケーリングによって補正し，正しい電位分布を得た。

不安定な差分スキーム (5.192) が 2 階の線形斉次差分方程式であることに注意すると，スケーリング法が使えるので，この式 (5.192) を使って n の大きいところから出発して n の小さいところを計算し，スケーリングによって正しい値が計算できることに気がつく。

スケーリング法を不安定な差分スキーム (5.192) に適用した結果を図 5.5に示す。計算誤差の増殖は全く見られない。

例 3 単振動の方程式の差分化

質量 m の小球がバネ定数 κ のバネに結ばれている。

小球の位置を x，時間を t とすると，小球の運動方程式は 2 階線形斉次微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\kappa}{m}x=0 \tag{5.194}$$

で表される。解は

$$x=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t), \quad \omega^2=\frac{\kappa}{m} \tag{5.195}$$

である。

この運動方程式の時間 t を間隔 δ で離散化 $t = n\delta$ (n は整数) する。2 階微分を 2 階の中心差分

$$\frac{d^2x}{dt^2} \to \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\delta^2} \tag{5.196}$$

で置き換えると，次の 2 階線形斉次差分方程式が得られる。

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} + \delta^2 \frac{\kappa}{m} x_n = 0 \tag{5.197}$$

この式は新しいパラメータ θ を使うと

$$x_{n+1} - 2\cos\ \theta x_n + x_{n-1} = 0, \tag{5.198}$$

$$\cos\ \theta = 1 - \delta^2 \frac{\kappa}{2m} \tag{5.199}$$

と表現される。

この差分方程式の解を求める。$x_n = \lambda^n$ とおくと特性方程式は

$$\lambda - 2\cos\ \theta + \lambda^{-1} = 0 \tag{5.200}$$

である。解は

$$\lambda_1 = \cos\ \theta + i \tag{5.201}$$

$$\sin\ \theta = e^{i\theta} \tag{5.202}$$

$$\lambda_2 = \cos\ \theta - i \tag{5.203}$$

$$\sin\ \theta = e^{-i\theta} \tag{5.204}$$

となるので独立な解は $\{e^{in\theta},\ e^{-in\theta}\}$ の二つである。

解の重ね合わせによって一般解は

$$x_n = A\cos(\theta\, n) + B\sin(\theta\, n), \tag{5.205}$$

$$\cos\ \theta = 1 - \delta^2 \frac{\kappa}{2m} \tag{5.206}$$

で与えられる。

したがって $\theta = \frac{2\pi}{N}$ (N は自然数) のとき，解は周期 N をもつ。

5.5.2　線形差分方程式の境界値問題

線形差分方程式の境界値問題として最も簡単で代表的例題を考える。次の 2 階線形斉次差分方程式

$$y_n - \lambda y_{n+1} + y_{n+2} = 0, \quad n = 0, 1, 2 \tag{5.207}$$

を境界条件 $y_0 = 0$, $y_4 = 0$ のもとで解け。

式 (5.207) で $n = 0, 1, 2$ とおくと連立方程式

$$y_0 - \lambda y_1 + y_2 = 0, \tag{5.208}$$

$$y_1 - \lambda y_2 + y_3 = 0, \tag{5.209}$$

$$y_2 - \lambda y_3 + y_4 = 0 \tag{5.210}$$

が得られる。境界条件 $y_0 = 0$ を使い，上式を解いて y_2, y_3, y_4 を y_1 で表す。

$$y_2 = \lambda y_1, \tag{5.211}$$

$$y_3 = \lambda y_2 - y_1 = (\lambda^2 - 1)y_1, \tag{5.212}$$

$$y_4 = \lambda y_3 - y_2 = [\lambda(\lambda^2 - 1) - \lambda]y_1 \tag{5.213}$$

しかし，この解はもう一つの境界条件 $y_4 = 0$ を満たす必要がある。このためには

$$y_1 = 0, \tag{5.214}$$

$$\lambda(\lambda^2 - 2) = 0 \tag{5.215}$$

のどちらかが 0 になる必要がある。

式 (5.214) が 0 になる場合はすべての解は 0 ($y_n = 0$, $n = 1, 2, 3$) となり，これは自明な解である。

自明でない解は式 (5.215) が 0 になる場合である。式 (5.215) を 0 にする λ の値を方程式 (5.207) の固有値という。

固有値は三つあり，大きい順に並べると，$\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\sqrt{2}$ である。これらの固有値 λ はどんな意味をもつのだろうか？

λ の違いによる解 y_1, y_2, y_3 の違いを調べてみる。

y_2 と y_3 を y_1 で表すと

1. $\lambda = \lambda_1 = \sqrt{2}$のとき，

$$y_2 = \sqrt{2}y_1, \tag{5.216}$$

$$y_3 = y_1 \tag{5.217}$$

2. $\lambda = \lambda_2 = 0$ のとき，

$$y_2 = 0, \tag{5.218}$$

$$y_3 = -y_1 \tag{5.219}$$

3. $\lambda = \lambda_3 = -\sqrt{2}$のとき，

$$y_2 = -\sqrt{2}y_1, \tag{5.220}$$

$$y_3 = y_1 \tag{5.221}$$

である。図 5.6に λ の違いによる解の違いを示す。

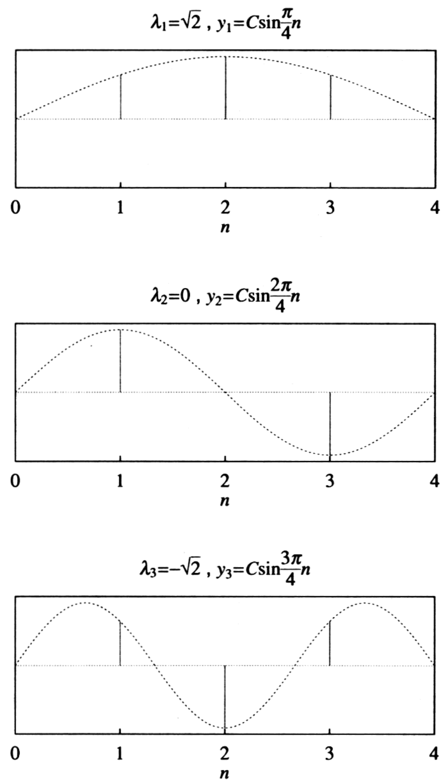


図 5.6　固有値 λ_k $(k = 1, 2, 3)$ に対応する固有ベクトル $y_k = C \sin \lambda_k n$ のグラフ

注　この結果は，差分方程式の境界値問題の解は一意性的に決まるとは限らないことを示している (比例定数 y_1 が任意に選べるから)。　□

さて，固有値の違いによる解 y_n の違いを明示するために y_n に固有値の番号を示す上付きのインデックスを付け次のようにベクトルの記号$\vec{y}^{\,(n)} = c_1\{y_1, y_2, y_3\}$ を使って書き表す。

$$\vec{y}^{\,(1)} = c_1 \left\{1, \sqrt{2}, 1\right\}, \tag{5.222}$$

$$\vec{y}^{\,(2)} = c_2\{1, 0, -1\}, \tag{5.223}$$

$$\vec{y}^{\,(3)} = c_3 \left\{1, -\sqrt{2}, 1\right\} \tag{5.224}$$

ここで c_1, c_2, c_3 は任意の比例定数である。これらの 3 次元ベクトル (固有ベクトルとよぶ) の特徴はお互いに直交している

$$\left(\vec{y}^{\,(1)} \cdot \vec{y}^{\,(2)}\right) = c_1 c_2 \left(1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot (-1)\right) = 0, \tag{5.225}$$

$$\left(\vec{y}^{\,(1)} \cdot \vec{y}^{\,(3)}\right) = c_1 c_3 \left(1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + 1 \cdot 1\right) = 0, \tag{5.226}$$

$$\left(\vec{y}^{\,(2)} \cdot \vec{y}^{\,(3)}\right) = c_2 c_3 \left(1 \cdot 1 + 0 \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + (-1) \cdot 1\right) = 0 \tag{5.227}$$

のことである。

ベクトル記号を使うと連立方程式 (5.208)，(5.209)，(5.210) はマトリックスを使って

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{5.228}$$

と表現される。

線形代数の結果を使うと，このマトリックス方程式が自明でない解をもつための条件は，行列式が 0,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.229}$$

である。一方，差分方程式の立場からはこの条件式は境界条件 $y_4 = 0$ を満たすための条件式 (5.215) である。

いままでの結果をまとめると，次のようになる。

『線形差分方程式

$$y_n - \lambda y_{n+1} + y_{n+2} = 0, \quad n = 0, 1, 2 \tag{5.230}$$

を境界条件 $y_0 = 0,\ y_4 = 0$ のもとで解くと，3 個の固有値 $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -\sqrt{2}$ があり，それぞれの固有値に対応する解 (3 次元の固有ベクトル) はお互いに直交している』。

この結果は一般化されて (式 (5.205) を参照せよ) 『線形差分方程式

$$y_n - \lambda y_{n+1} + y_{n+2} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{5.231}$$

を境界条件 $y_0 = 0,\ y_{N+1} = 0$ のもとで解くと，N 個の固有値$\lambda_k = 2\ \cos(\theta_k),\ \theta_k = \dfrac{\pi k}{N+1},\ k = 1, 2, \cdots, N)$ があり，それぞれの固有値に対応する解 (N 次元の固有ベクトル) $y_n^{(k)} = c_k \sin(\theta_k n),\ k = 1, 2, \cdots, N$ はお互いに直交している。

$$(\vec{y}^{\,(k)} \cdot \vec{y}^{\,(l)}) = c_k c_l \sum_{n=1}^{N} \sin(\theta_k n) \sin(\theta_l n) = 0, \quad k \neq l\text{』} \tag{5.232}$$

このように，線形差分方程式の境界値問題は，マトリックスの固有値問題と関係している。

$\hat{y}^{(k)} = \{\sin(\theta_k n),\ n = 1, 2, \cdots, N\}$ は直交ベクトルであるので，任意の N 次元ベクトル$\vec{F} = \{F_1, F_2, \cdots, F_N\}$ はこれらのベクトルで展開できる。

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{N} f_k \hat{y}^{(k)} \tag{5.233}$$

または成分で表すと

$$F_n = \sum_{k=1}^{N} f_k \sin(\theta_k n) \tag{5.234}$$

となる。

この式に $\sin(\theta_l n)$ をかけて n での和をとると，直交性より

$$\sum_{n=1}^{N} F_n \sin(\theta_l n) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} f_k \sin(\theta_k n) \sin(\theta_l n) \tag{5.235}$$

$$= f_l \sum_{n=1}^{N} \sin^2(\theta_l n) \tag{5.236}$$

またはベクトルで表すと

$$\left(\vec{F}\cdot\hat{y}^{(l)}\right)=\sum_{k=1}^{N}F_k\left(\hat{y}^{(k)}\cdot\hat{y}^{(l)}\right)=f_l\left(\hat{y}^{(l)}\cdot\hat{y}^{(l)}\right) \tag{5.237}$$

である。したがって，展開係数 f_l は

$$f_l=\frac{\left(\vec{F}\cdot\hat{y}^{(l)}\right)}{\left(\hat{y}^{(l)}\cdot\hat{y}^{(l)}\right)} \tag{5.238}$$

または成分で表すと

$$f_l=\frac{\sum_{n=1}^{N}F_n\sin(\theta_l n)}{\sum_{n=1}^{N}\sin^2(\theta_l n)} \tag{5.239}$$

で与えられる。

これらの関係式が離散フーリエ変換の基礎になる。

一方，線形方程式は連続極限で微分方程式に帰着する。N 次元直交ベクトルの成分 $y_n^{(k)}=c_k\sin(\theta_k n),\ n=1,2,\cdots,N$ は $x=n\epsilon,\ \epsilon=\dfrac{1}{N+1}$ とおき $N\to\infty$ の極限を考えると正弦関数 $y^{(k)}(x)=c_k\sin(k\pi x)$ になり，ベクトルの直交性は，比例定数を適当に選ぶと，正弦関数の積分

$$(\vec{y}^{\,(k)}\cdot\vec{y}^{\,(l)})=\int_0^1\sin(kx)\sin(lx)\,dx=0,\quad k\neq l,\quad k,l=1,2,3,\cdots \tag{5.240}$$

に書き換えられる。

このことは正弦関数 $y^{(k)}(x)=c_k\sin(k\pi x)$ は“無限次元 の直交ベクトル”の成分とみなせることを示している。

演習問題 5 次の差分方程式を解け。

1. $y_n-5y_{n-1}+6y_{n-2}=0,\quad y_0=y_1=1$
2. $y_n=2y_{n-1}-y_{n-2},\quad y_1=2,\ y_2=3$
3. $y_n-\lambda y_{n-1}+y_{n-2}=0,\quad y_0=2,\ y_1=\lambda$

4. $y_n - \lambda y_{n-1} + y_{n-2} = 0, \quad y_0 = 1,\ y_1 = \lambda$

ヒント　問 3, 4 では $\lambda = 2\cos\theta$ とおけ。

演習問題 6　次の連立差分方程式の解を求めよ。

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n + 2y_n \end{cases}$$

初期値は，$x_1 = 1,\ y_1 = 2$。2 式より y_n を消去して，x_n に対する 2 階差分方程式を解く。

5.5.3　2 階線形非斉次差分方程式の解法

この項では 2 階線形非斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \tag{5.241}$$

の解法を勉強する。

この非斉次方程式を満足する一つの解 (任意定数を含まない解，したがって，初期値や境界値を満たしえない解) が見つかったとしてそれを特解 (special solution) $y_s(x)$ とする。

$$\frac{d^2y_s}{dx^2} + p(x)\frac{dy_s}{dx} + q(x)y_s = r(x) \tag{5.242}$$

この解 $y_s(x)$ とこの方程式 (5.241) の一般解 (general solution) $y_g(x)$

$$\frac{d^2y_g}{dx^2} + p(x)\frac{dy_g}{dx} + q(x)y_g = r(x) \tag{5.243}$$

との差はどれくらいあるのだろうか？

式 (5.243) から式 (5.242) を引くと差 $z(x) = y_g(x) - y_s(x)$ に対する微分方程式は

$$\frac{d^2z}{dx^2} + p(x)\frac{dz}{dx} + q(x)z = 0 \tag{5.244}$$

である。これは前節で求めた斉次方程式である。したがって，非斉次微分方程式の一般解と特解との差はたかだか斉次方程式の解であることがわかる。

言い換えると関係式

$$y_g(x) = y_s + z(x) \tag{5.245}$$

が成り立つ。すなわち『非斉次微分方程式の一般解は特解と斉次方程式の一般解の和である』。このため特解にはなかった任意定数は，斉次方程式の一般解がもつ任意定数によって補われる。

全く同じようにして非斉次差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 y(x) + p(x)\Delta_{+x} y(x) + q(x)y(x) = r(x) \tag{5.246}$$

の一般解は，この非斉次方程式 (5.246) の特解と斉次方程式の一般解の和

$$y_g(x) = y_s + z(x) \tag{5.247}$$

であることが示される。したがって，非斉次方程式の特解を求めることが重要になる。

微分方程式も差分方程式も，特解の求め方は全く同じである。以下では，差分方程式の特解の求め方を主として解説する。

1. 代入法。特解は非斉次項 $r(x)$ によって一定の型に分類される。この型の決まった関数を予想し方程式に代入して特解を求める。

2. 定数変化法。これは 1 階非斉次方程式の解を導いたのと同じやり方である。斉次方程式の一般解に含まれる 2 個の定数 c_1, c_2 を x の関数 $c_1(x), c_2(x)$ と考えて $c_1(x), c_2(x)$ に対する差分方程式を導き，この方程式の解として特解を求める。

3. 母関数の方法，あるいは $z-$変換の方法を使う。この方法は初期値問題に対してとくに有効である。$z-$変換法は Laplace 変換法の差分版である。

(i)　代入法

まず簡単な例題で説明する。

例題 1　差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y + qy = 1, \qquad (p,\ q\text{は定数}) \tag{5.248}$$

の特解を求めよ。

$r(x)$ が定数であるので特解を $y = a$ (定数) と仮定し代入すると，$\Delta_{+x}^2 a = \Delta_{+x} a = 0$ であるので，$qa = 1$ が得られる。ゆえに

$$y = \frac{1}{q} \tag{5.249}$$

が式 (5.248) の特解になる。

質問　$q = 0$ のとき特解はどうなるのですか？

答　そのときは特解を $y = ax$ と仮定します。方程式は $\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y = 1$ であるので $y = ax$ を代入すると $pa = 1$ が得られる。ゆえに

$$y = \frac{1}{p}x \tag{5.250}$$

が式 (5.248) で $q = 0$ の場合の特解になる。

質問　なぜ $y = a$ ではなく $y = ax$ のように x 倍するのですか？

答　$q = 0$ のときの差分方程式 $\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y = 1$ は新しい従属変数 $z = \Delta_{+x} y$ によって 1 階の差分方程式 $\Delta_{+x} z + pz = 1$ に変換されます。この差分方程式の特解は $z = \frac{1}{p}$ です。$\Delta_{+x} y = z$ であるので y はこの式を和分して $y = \frac{1}{p}x + c_0$ となります。しかし定数 c_0 は斉次方程式 $\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y = 0$ の解であるので特解より除外します。x 倍するのは y が $\Delta_{+x} y = \frac{1}{p}$ の解であるからです。

例題 2　差分方程式

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1 \tag{5.251}$$

の特解を求めよ。

$y_n = a$ を仮定して代入すると左辺が 0 となるので a は決定できない。そこで，$y = an$ と仮定して代入すると，$a(n+2) - 3a(n+1) + 2an = 1$ となり $a = -1$ と決定される。したがって，特解は

$$y = -x \tag{5.252}$$

である。

例題 3　差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y + qy = x \tag{5.253}$$

の特解を求めよ。

特解を $y = ax + b$ (a, b は定数) と仮定し代入すると，$\Delta_{+x}^2 x = 0$, $\Delta_{+x} x = 1$ であるので，方程式

$$pa + q(ax + b) = x \tag{5.254}$$

が得られる。x のべき関数は 1 次独立であるのでその係数は 0 になる。ゆえに $qa = 1, pa + qb = 1$ である。この連立方程式を解いて

$$y = \frac{1}{q}x - \frac{p}{q^2} \tag{5.255}$$

が式 (5.253) の特解になる。

例題 4 差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y + qy = x^{\underline{2}} + x + 1 \tag{5.256}$$

の特解を求めよ。

特解を $y = ax^{\underline{2}} + bx + c$ (a, b, c は定数) と仮定し代入すると，$\Delta_{+x}^2 x^{\underline{2}} = 2$, $\Delta_{+x} x^{\underline{2}} = 2x$ であるので，方程式

$$2a + p(2ax + b) + q(ax^{\underline{2}} + bx + c) = x^{\underline{2}} + x + 1 \tag{5.257}$$

が得られる。x の階乗べき関数は 1 次独立であるのでその係数は 0 になる。ゆえに，$qa = 1, 2pa + qb = 1, 2a + pb + qc = 1$ である。この連立方程式を解いて

$$y = \frac{1}{q}x^{\underline{2}} + \frac{1}{q}\left(1 - 2\frac{p}{q}\right)x + \frac{1}{q}\left[1 - \frac{2}{q} - \frac{p}{q}\left(1 - 2\frac{p}{q}\right)\right] \tag{5.258}$$

が式 (5.256) の特解になる。

一般に差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y + qy = r(x) \quad (q \neq 0) \tag{5.259}$$

で $r(x)$ が x の n 次多項式のとき特解の表現式を

$$y = a_0 x^{\underline{n}} + a_1 x^{\underline{n-1}} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{5.260}$$

と仮定すれば係数は代入法によって決められる。

例題 5 差分方程式

$$y_{n+1} - 2\cos\theta y_n + y_{n-1} = A\cos\omega n + B\sin\omega n \tag{5.261}$$

(A, B, ω, θ は定数) の特解を求めよ。

特解を $y_n = a\cos\omega n + b\sin\omega n$ (a, b は定数) と仮定し代入すると，$y_{n+1} + y_{n-1} = 2\cos\omega(a\cos\omega n + b\sin\omega n)$ であるので，方程式

$$2\cos\omega(a\cos\omega n + b\sin\omega n) - 2\cos\theta(a\cos\omega n + b\sin\omega n) = A\cos\omega n + B\sin\omega n \tag{5.262}$$

が得られる。ゆえに $a = \dfrac{A}{2(\cos\,\omega - \cos\,\theta)}, b = \dfrac{B}{2(\cos\,\omega - \cos\,\theta)}$ である。したがって

$$y_n = \frac{A}{2(\cos\,\omega - \cos\,\theta)}\cos\,\omega n + \frac{B}{2(\cos\,\omega - \cos\,\theta)}\sin\,\omega n \tag{5.263}$$

が式 (5.261) の特解になる。

この解は $\cos\,\omega \to \cos\,\theta$ のとき振幅は非常に大きくなる。時間 $(t = n\delta)$ が連続 $(\delta \to 0)$ のとき，この現象は単振動の共鳴，または共振 (resonance) とよばれている。$\cos\,\omega = \cos\,\theta$ のときは，この解はこのままでは正しくない。例題 6 であらためて考察する。

一般に差分方程式

$$\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y + qy = A\cos\,\omega x + B\sin\,\omega x \tag{5.264}$$

の (ただしこの式の右辺が斉次方程式 $\Delta_{+x}^2 y + p\Delta_{+x} y + qy = 0$ の解である場合を除く) 特解は

$$y = a\,\cos\,\omega x + b\,\sin\,\omega x \tag{5.265}$$

とおいて求められる。このことは三角関数を差分したものはやはり三角関数で表せることから理解できる。

例題 6　差分方程式

$$y_{n+1} - 2\cos\,\theta y_n + y_{n-1} = A\cos\,\theta n + B\sin\,\theta n \tag{5.266}$$

$(A, B, \theta$ は定数) の特解を求めよ。特解を $y_n = a\,\cos\,\theta n + b\,\sin\,\theta n$ $(a, b$ は定数) と仮定し代入すると，式 (5.266) の左辺は

$$2\cos\,\theta(a\,\cos\,\theta n + b\,\sin\,\theta n) - 2\cos\,\theta(a\,\cos\,\theta n + b\,\sin\,\theta n) = 0 \tag{5.267}$$

となって a, b は決定できない。これは $\{\cos\,\theta n,\ \sin\,\theta n\}$ が斉次方程式の解になっているからである。この場合は定数変化法の結果を利用して

$$y_n = (a_0 + a\,n)\cos\,\theta n + (b_0 + b\,n)\sin\,\theta n \tag{5.268}$$

を仮定するが，a_0, b_0 を含む項は斉次方程式の解であるので 0 になる。したがって特解を $y_n = a\,n\,\cos\,\theta n + b\,n\,\sin\,\theta n$ と仮定し代入すると

$$2\sin\,\theta(-a\,\sin\,\theta n + b\,\cos\,\theta n) = A\cos\,\theta n + B\sin\,\theta n \tag{5.269}$$

が得られる。ゆえに $a = -\frac{B}{2\sin\theta}, b = \frac{A}{2\sin\theta}$ である。したがって

$$y_n = -\frac{Bn}{2\sin\theta}\cos\theta n + \frac{An}{2\sin\theta}\sin\theta n \tag{5.270}$$

が式 (5.261) の特解になる。

(ii) 定数変化法

定数変化法の基本的考え方は，斉次方程式の解と非斉次方程式の解はそんなに違ってはいない，違いはせいぜい定数が変化する程度であろうと仮定して，定数 c を x の関数 $c(x)$ で置き換えて未知関数 $c(x)$ を求める方法である。

1 階線形微分方程式の場合には未知関数の数は 1 個であるので，簡単に $c(x)$ が満たすべき微分方程式が求まったが，2 階の線形微分方程式ではこの未知関数の数が 2 個になる。

この未知関数をどうやってうまく処理するかが中心課題である。

結果よりも方法を学んでほしい。方法を理解できると，N 階線形微分方程式や線形差分方程式の特解もこの方法で (原理的に) 求められるようになる。

はじめに 2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x) \tag{5.271}$$

の特解の求め方を勉強する。この式で $r(x) = 0$ とおいた斉次方程式

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dx^2} + p(x)\frac{d\tilde{y}}{dx} + q(x)\tilde{y} = 0 \tag{5.272}$$

の二つの解 $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ と未知関数 $c_1(x), c_2(x)$ を使って式 (5.271) の解を

$$y = c_1(x)\tilde{y}_1 + c_2(x)\tilde{y}_2 \tag{5.273}$$

と表す。これを式 (5.271) に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2c_1}{dx^2}\tilde{y}_1 + 2\frac{dc_1}{dx}\frac{d\tilde{y}_1}{dx} + c_1\frac{d^2\tilde{y}_1}{dx^2} + \frac{d^2c_2}{dx^2}\tilde{y}_2 + 2\frac{dc_2}{dx}\frac{d\tilde{y}_2}{dx} + c_2\frac{d^2\tilde{y}_2}{dx^2} \\
&+p(x)\frac{dc_1}{dx}\tilde{y}_1 + p(x)c_1\frac{d\tilde{y}_1}{dx} + p(x)\frac{dc_2}{dx}\tilde{y}_2 + p(x)c_2\frac{d\tilde{y}_2}{dx} + q(x)c_1\tilde{y}_1 + q(x)c_2\tilde{y}_2 \\
&= r(x)
\end{aligned}$$

が得られる。

ここで，$\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ が斉次式 (5.272) の解であることに注意すると，上式は少し簡単になって

$$\frac{d^2c_1}{dx^2}\tilde{y}_1 + 2\frac{dc_1}{dx}\frac{d\tilde{y}_1}{dx} + \frac{d^2c_2}{dx^2}\tilde{y}_2 + 2\frac{dc_2}{dx}\frac{d\tilde{y}_2}{dx} + p(x)\frac{dc_1}{dx}\tilde{y}_1 + p(x)\frac{dc_2}{dx}\tilde{y}_2 = r(x)$$

となる。

この方程式の解として未知関数 $c_1(x), c_2(x)$ を決めるのが目的である。一つの方程式に二つ未知関数があるので，この方程式をうまく (解が求めやすいように) 分離 (decoupling) する。$p(x)$ の係数に注目して，この係数が

$$\frac{dc_1}{dx}\tilde{y}_1 + \frac{dc_2}{dx}\tilde{y}_2 = 0 \tag{5.274}$$

になるように選ぶ。これが $c_1(x), c_2(x)$ に対する第一の方程式である。

残りは

$$\frac{d^2c_1}{dx^2}\tilde{y}_1 + 2\frac{dc_1}{dx}\frac{d\tilde{y}_1}{dx} + \frac{d^2c_2}{dx^2}\tilde{y}_2 + 2\frac{dc_2}{dx}\frac{d\tilde{y}_2}{dx} = r(x) \tag{5.275}$$

である。ここで，上式から式 (5.274) の x 微分

$$\frac{d^2c_1}{dx^2}\tilde{y}_1 + \frac{dc_1}{dx}\frac{d\tilde{y}_1}{dx} + \frac{d^2c_2}{dx^2}\tilde{y}_2 + \frac{dc_2}{dx}\frac{d\tilde{y}_2}{dx} = 0 \tag{5.276}$$

を引くと，次式

$$\frac{dc_1}{dx}\frac{d\tilde{y}_1}{dx} + \frac{dc_2}{dx}\frac{d\tilde{y}_2}{dx} = r(x) \tag{5.277}$$

が得られる。これが第二の方程式である。

式 (5.274),(5.277) は $\frac{dc_1}{dx}, \frac{dc_2}{dx}$ に対する線形連立方程式であり，解は行列式 (Wronskian, ロンスキー行列式とよばれる)

$$W(\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)) = \begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 \\ \frac{d\tilde{y}_1}{dx} & \frac{d\tilde{y}_2}{dx} \end{vmatrix} \tag{5.278}$$

を使って

$$\frac{dc_1}{dx} = -\frac{r(x)\tilde{y}_2}{\begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 \\ \frac{d\tilde{y}_1}{dx} & \frac{d\tilde{y}_2}{dx} \end{vmatrix}} \tag{5.279}$$

$$\frac{dc_2}{dx} = \frac{r(x)\tilde{y}_1}{\begin{vmatrix} \tilde{y}_1 & \tilde{y}_2 \\ \frac{d\tilde{y}_1}{dx} & \frac{d\tilde{y}_2}{dx} \end{vmatrix}} \tag{5.280}$$

と表される。

この式を積分して特解 y の表現は，次式

$$
\begin{aligned}
y(x) &= c_1(x)\tilde{y}_1 + c_2(x)\tilde{y}_2 \\
&= -\tilde{y}_1(x)\int^x \frac{r(x')\tilde{y}_2(x')}{W(\tilde{y}_1(x'),\tilde{y}_2(x'))}dx' + \tilde{y}_2(x)\int^x \frac{r(x')\tilde{y}_1(x')}{W(\tilde{y}_1(x'),\tilde{y}_2(x'))}dx'
\end{aligned}
\tag{5.281}
$$

で与えられる。積分定数の下限は任意でよい。積分の下限が決める定数 c_1, c_2 は，斉次方程式の解 $c_1\tilde{y}_1 + c_2\tilde{y}_2$ を与えるので，特解を求めるときには無視できる。

次に 2 階線形差分方程式

$$
y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = r_n \tag{5.282}
$$

の特解の求め方を勉強する。この式で $r_n = 0$ とおいた斉次方程式

$$
y_{n+2} + p_n y_{n+1} + q_n y_n = 0 \tag{5.283}
$$

の二つの解 $\tilde{y}_n^{(1)}, \tilde{y}_n^{(2)}$ と未知関数 $c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$ を使って式 (5.282) の解を

$$
y_n = c_n^{(1)}\tilde{y}_n^{(1)} + c_n^{(2)}\tilde{y}_n^{(2)} \tag{5.284}
$$

と表し，式 (5.282) に代入すると

$$
\begin{aligned}
c_{n+2}^{(1)}\tilde{y}_{n+2}^{(1)} + c_{n+2}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(2)} + p_n\left(c_{n+1}^{(1)}\tilde{y}_{n+1}^{(1)} + c_{n+1}^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(2)}\right) \\
+ q_n\left(c_n^{(1)}\tilde{y}_n^{(1)} + c_n^{(2)}\tilde{y}_n^{(2)}\right) = r_n
\end{aligned}
$$

となる。

上式から斉次方程式の解

$$
c_n^{(1)}\left(\tilde{y}_{n+2}^{(1)} + p_n\tilde{y}_{n+1}^{(1)} + q_n\tilde{y}_n^{(1)}\right) = 0 \tag{5.285}
$$

$$
c_n^{(2)}\left(\tilde{y}_{n+2}^{(2)} + p_n\tilde{y}_{n+1}^{(2)} + q_n\tilde{y}_n^{(2)}\right) = 0 \tag{5.286}
$$

を引き算すると

$$
\begin{aligned}
&\left(c_{n+2}^{(1)} - c_n^{(1)}\right)\tilde{y}_{n+2}^{(1)} + \left(c_{n+2}^{(2)} - c_n^{(2)}\right)\tilde{y}_{n+2}^{(2)} \\
&+ p_n\left(c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)}\right)\tilde{y}_{n+1}^{(1)} + p_n\left(c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)}\right)\tilde{y}_{n+1}^{(2)} = r_n
\end{aligned}
\tag{5.287}
$$

が得られる。

この式 (5.287) を満たす $c_n^{(1)}, c_n^{(2)}$ を求める。微分方程式の場合と同じように，まず p_n の係数を

$$\left(c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)}\right) \tilde{y}_{n+1}^{(1)} + \left(c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)}\right) \tilde{y}_{n+1}^{(2)} = 0 \tag{5.288}$$

とおく。式 (5.287) の残りは

$$\left(c_{n+2}^{(1)} - c_n^{(1)}\right) \tilde{y}_{n+2}^{(1)} + \left(c_{n+2}^{(2)} - c_n^{(2)}\right) \tilde{y}_{n+2}^{(2)} = r_n \tag{5.289}$$

である。この式から式 (5.288) の n を $n+1$ で置き換えた式

$$\left(c_{n+2}^{(1)} - c_{n+1}^{(1)}\right) \tilde{y}_{n+2}^{(1)} + \left(c_{n+2}^{(2)} - c_{n+1}^{(2)}\right) \tilde{y}_{n+2}^{(2)} = 0 \tag{5.290}$$

を引き算すると

$$\left(c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)}\right) \tilde{y}_{n+2}^{(1)} + \left(c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)}\right) \tilde{y}_{n+2}^{(2)} = r_n \tag{5.291}$$

が得られる。

式 (5.288),(5.291) は $c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)}, c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)}$ に対する線形連立方程式であり，解は行列式 (カソラティ (Casorati) 行列式とよばれる)

$$C\left(\tilde{y}_n^{(1)}, \tilde{y}_n^{(2)}\right) = \begin{vmatrix} \tilde{y}_n^{(1)} & \tilde{y}_n^{(2)} \\ \tilde{y}_{n+1}^{(1)} & \tilde{y}_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix} \tag{5.292}$$

を使って

$$c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)} = -\frac{r(x)\tilde{y}_2}{\begin{vmatrix} \tilde{y}_n^{(1)} & \tilde{y}_n^{(2)} \\ \tilde{y}_{n+1}^{(1)} & \tilde{y}_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}} \tag{5.293}$$

$$c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)} = \frac{r(x)\tilde{y}_1}{\begin{vmatrix} \tilde{y}_n^{(1)} & \tilde{y}_n^{(2)} \\ \tilde{y}_{n+1}^{(1)} & \tilde{y}_{n+1}^{(2)} \end{vmatrix}} \tag{5.294}$$

と表される。

この式を和分して特解 y_n の表現は，次式

$$y_n = c_n^{(1)}\tilde{y}_n^{(1)} + c_n^{(2)}\tilde{y}_n^{(2)} \tag{5.295}$$

$$= -\tilde{y}_n^{(1)} \sum_{k=0}^{n} \frac{r_{k-1}\tilde{y}_k^{(2)}}{C\left(\tilde{y}_n^{(1)}, \tilde{y}_n^{(2)}\right)} + \tilde{y}_n^{(2)} \sum_{k=0}^{n} \frac{r_{k-1}\tilde{y}_k^{(1)}}{C\left(\tilde{y}_n^{(1)}, \tilde{y}_n^{(2)}\right)} \tag{5.296}$$

で与えられる。和分定数の下限は任意でよい。和分の下限が決める定数 c_1, c_2 は，斉次方程式の解 $c^{(1)}\tilde{y}_n^{(1)} + c^{(2)}\tilde{y}_n^{(2)}$ を与えるので，特解を求めるときは無視できる。

定数変化法による 2 階線形差分方程式の特解の求め方を，次の例題を使って，もう一度説明する。ただし，N 階線形差分方程式の場合に拡張できるように記述の仕方を少し天下りにする。

例題　次の 2 階線形差分方程式

$$y_{n+2} - 2\cos\theta y_{n+1} + y_n = r_{n+N+1} - r_{n+1} \tag{5.297}$$

の特解を求めよ。ただし $\theta = \dfrac{2\pi}{N}$ である。

まず斉次方程式

$$\tilde{y}_{n+2} - 2\cos\theta\tilde{y}_{n+1} + \tilde{y}_n = 0 \tag{5.298}$$

の解 $\{\cos\theta n, \sin\theta n\}$ を使って特解を

$$y_n = c_n^{(1)}\cos(\theta n) + c_n^{(2)}\sin(\theta n) \tag{5.299}$$

と仮定する。

次に前進差分の記号 Δ_{+n} を使って

$$c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)} = \Delta_{+n}c_n^{(1)} \tag{5.300}$$

$$c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)} = \Delta_{+n}c_n^{(2)} \tag{5.301}$$

とおき，$\Delta_{+n}c_n^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ が 2 元連立 1 次方程式

$$\Delta_{+n}c_n^{(1)}\ \cos(\theta(n+1)) + \Delta_{+n}c_n^{(2)}\ \sin(\theta(n+1)) = 0 \tag{5.302}$$

$$\Delta_{+n}c_n^{(1)}\ \cos(\theta(n+2)) + \Delta_{+n}c_n^{(2)}\ \sin(\theta(n+2)) = r_{n+N+1} - r_{n+1} \tag{5.303}$$

の解であると仮定する。この仮定の下で表現式 (5.299) が式 (5.297) の解であることを示す。

まず次の関係式が成り立つ。

$$y_{n+1} = c_{n+1}^{(1)}\cos(\theta(n+1)) + c_{n+1}^{(2)}\sin(\theta(n+1)) \tag{5.304}$$

$$= c_n^{(1)}\cos(\theta(n+1)) + c_n^{(2)}\sin(\theta(n+1))$$

$$+ \left(\Delta_{+n}c_n^{(1)}\ \cos(\theta(n+1)) + \Delta_{+n}c_n^{(2)}\ \sin(\theta(n+1))\right) \tag{5.305}$$

$$= c_n^{(1)}\cos(\theta(n+1)) + c_n^{(2)}\sin(\theta(n+1)) \tag{5.306}$$

さらに，この関係式を使うと次式が成り立つ。

$$y_{n+2} = c_{n+1}^{(1)}\cos(\theta(n+2)) + c_{n+1}^{(2)}\sin(\theta(n+2)) \tag{5.307}$$

$$= c_n^{(1)}\cos(\theta(n+2)) + c_n^{(2)}\sin(\theta(n+2))$$
$$+ (\Delta_{+n}c_n^{(1)}\ \cos(\theta(n+2)) + \Delta_{+n}c_n^{(2)}\ \sin(\theta(n+2)) \tag{5.308}$$

$$= c_n^{(1)}\cos(\theta(n+2)) + c_n^{(2)}\sin(\theta(n+2)) + r_{n+N+1} - r_{n+1} \tag{5.309}$$

が得られる。これらの結果を式 (5.297) に代入すると

$$y_{n+2} - 2\cos\ \theta y_{n+1} + y_n \tag{5.310}$$
$$= c_n^{(1)}\cos(\theta(n+2)) + c_n^{(2)}\sin(\theta(n+2)) + r_{n+N+1} - r_{n+1}$$
$$-2\cos\ \theta[c_n^{(1)}\cos(\theta(n+1)) + c_n^{(2)}\sin(\theta(n+1))] + c_n^{(1)}\cos(\theta n) + c_n^{(2)}\sin(\theta n)$$
$$= r_{n+N+1} - r_{n+1} \tag{5.311}$$

となって，確かに 2 階線形差分方程式 (5.297) の解になっていることがわかる。

一方，$\Delta_{+n}c_n^{(k)}$ $(k=1,2)$ は 2 元連立 1 次方程式を満たすので，解はクラメールの公式により行列式 (カソラティ行列式とよばれる)

$$C_n = C(\cos(\theta n), \sin(\theta n)) \tag{5.312}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(\theta n) & \sin(\theta n) \\ \cos(\theta(n+1)) & \sin(\theta(n+1)) \end{vmatrix} \tag{5.313}$$

$$= \sin(\theta) \tag{5.314}$$

を使って

$$\Delta_{+n}c_n^{(1)} = -\frac{(r_{n+N+1} - r_{n+1})}{\sin(\theta)}\sin(\theta(n+1)), \tag{5.315}$$

$$\Delta_{+n}c_n^{(2)} = \frac{(r_{n+N+1} - r_{n+1})}{\sin(\theta)}\cos(\theta(n+1)) \tag{5.316}$$

で与えられる。

これらの式を和分すると

$$c_n^{(1)} = -\frac{1}{\sin(\theta)}\sum_{k=-\infty}^{n}(r_{k+N} - r_k)\sin(\theta k), \tag{5.317}$$

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{\sin(\theta)}\sum_{k=-\infty}^{n}(r_{k+N} - r_k)\cos(\theta k) \tag{5.318}$$

となる。和分の下限は任意であるが後の都合上 $-\infty$ とした。

ここで $\cos(\theta n)$，$\sin(\theta n)$ の周期性 $\cos(\theta n) = \cos(\theta(n+N))$，$\sin(\theta n) = \sin(\theta(n+N))$ に注意すると和分が計算できて

$$c_n^{(1)} = -\frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=-\infty}^{n} r_{k+N} \sin(\theta(k+N)) - r_k \sin(\theta k)$$

$$= -\frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=1}^{N} r_{n+k} \sin(\theta(n+k)), \tag{5.319}$$

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=-\infty}^{n} r_{k+N} \cos(\theta(k+N)) - r_k \cos(\theta k)$$

$$= \frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=1}^{N} r_{n+k} \cos(\theta(n+k)) \tag{5.320}$$

となる。

これらを式 (5.299) に代入して

$$y_n = c_n^{(1)} \cos(\theta n) + c_n^{(2)} \sin(\theta n) \tag{5.321}$$

$$= \frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=1}^{N} r_{n+k} [\sin(\theta n) \cos(\theta(n+k)) - \cos(\theta n) \sin(\theta(n+k))]$$

$$= -\frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=1}^{N} r_{n+k} \sin(\theta k) \tag{5.322}$$

したがって，特解 y_n は次式

$$y_n = -\frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=1}^{N} r_{n+k} \sin(\theta k) \tag{5.323}$$

で与えられる。

一般解は，斉次方程式の解と特解の和

$$y_n = c_1 \cos(\theta n) + c_2 \sin(\theta n) - \frac{1}{\sin(\theta)} \sum_{k=1}^{N} r_{n+k} \sin(\theta k) \tag{5.324}$$

である。

演習問題 7　次の差分方程式を解け。

1. $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 2, \quad y_0 = 0,\ y_1 = 4$
2. $y_n - 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = 5^n, \quad y_0 = 0,\ y_1 = 1$
3. $y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} = 2^n,$　　特解を求めよ
4. $2y_n - 3y_{n-1} + y_{n-2} = n, \quad y_{-2} = y_{-1} = 0$

演習問題 8a　次の差分方程式の解を求めよ。

$$y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = \frac{3}{n(n+3)}, \quad y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{6}$$

問題 8a はまずカンを使って (y_3, $y_4 \cdots$ を計算し一般項を推定して) 解くことを薦める。解けなかったときに理論を勉強する。

演習問題 8b　同じ差分方程式で初期値を $y_1 = 0,\ y_2 = 1$ とすると解はどのように表されるか？

5.5.4　変数係数の 2 階線形斉次差分方程式の解

この項では変数係数の 2 階線形斉次差分方程式

$$y_{n+1} - a_n y_n + b_n y_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.325}$$

または正規型に書き直して

$$y_{n+2} = a_n y_{n+1} - b_n y_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{5.326}$$

の一般解について述べる。この分野は，線形微分方程式に比べて理論的研究が一番遅れているので，今後の発展が期待できる。ここでは，係数 a_n, b_n が発散しない場合のみを考える。

まず，式 (5.326) で特別な初期値

$$y_0 = 1, \quad y_1 = a_0 \tag{5.327}$$

をもつ解 y_n の表現式を求める。式 (5.326) に $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ を代入すると，$y_2, y_3, \cdots$ が次のように求められる。

$$y_2 = a_1 y_1 - b_1 y_0 = a_0 a_1 - b_1, \tag{5.328}$$

$$y_3 = a_2 y_2 - b_2 y_1 = a_0 a_1 a_2 - b_1 a_2 - b_2 a_0, \tag{5.329}$$

$$\cdots \quad \cdots$$

この計算結果を眺めると, $y_1, y_2, y_3, \cdots$ が次の行列式で表現できることに気づく。

$$y_1 = |a_0|, \tag{5.330}$$

$$y_2 = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 \\ 1 & a_1 \end{vmatrix}, \tag{5.331}$$

$$y_3 = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 \\ 1 & a_1 & b_2 \\ 0 & 1 & a_2 \end{vmatrix} \tag{5.332}$$

$\cdots \quad \cdots$

これらの結果より, 任意の n について

$$y_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & a_n \end{vmatrix} \tag{5.333}$$

と推定される。この推定が正しいことは次のように証明される。

行列式 (5.333) を最後の列で展開すると

$$y_{n+1} = a_n \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$- b_n \begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & b_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{5.334}$$

$$= a_n y_n - b_n y_{n-1} \tag{5.335}$$

となるので，確かに y_n は差分方程式 (5.326) を満足している。しかし，この解は差分方程式 (5.326) の一つの解であって，この解だけでは任意の初期値は満たされない。この解と線形独立なもう一つの解が必要になる。このために定数変化法を使って2階差分方程式を1階差分方程式に変換し解を求める。この方法を階数低下法という。

階数低下法とは差分方程式の既知の解を $\tilde{y}_n$ とし，新しい解を

$$y_n = z_n \tilde{y}_n \tag{5.336}$$

とおいて (定数変化法)，z_n が満たす方程式を定め (階数低下法)，解を求める方法である。式 (5.336) を差分方程式 (5.325) に代入すると

$$z_{n+1}\tilde{y}_{n+1} - a_n z_n \tilde{y}_n + b_n z_{n-1}\tilde{y}_{n-1} = 0 \tag{5.337}$$

となる。この式から既知の解 $\tilde{y}_n$ が満たす方程式

$$z_n(\tilde{y}_{n+1} - a_n\tilde{y}_n + b_n\tilde{y}_{n-1}) = 0 \tag{5.338}$$

を引き算すると

$$(z_{n+1} - z_n)\tilde{y}_{n+1} - b_n(z_n - z_{n-1})\tilde{y}_{n-1} = 0 \tag{5.339}$$

が得られる。ここで，$z_{n+1} - z_n = f_n$ を新しい従属変数とみなすと，上式は f_n に対する1階差分方程式 (階数が低下した式)

$$\tilde{y}_{n+1} f_n - b_n \tilde{y}_{n-1} f_{n-1} = 0 \tag{5.340}$$

または

$$f_n = \frac{b_n \tilde{y}_{n-1}}{\tilde{y}_{n+1}} f_{n-1} \tag{5.341}$$

となる (階数低下法)。1階差分方程式の解は直ちに求められて，解は

$$f_n = f_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{b_k \tilde{y}_{k-1}}{\tilde{y}_{k+1}} \tag{5.342}$$

で与えられる。ここで f_0 は任意定数である。この結果を定義式 $z_{n+1} - z_n = f_n$ に代入して z_n が次のように

$$z_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k + z_0 \tag{5.343}$$

求められる。これらの結果を総合すると，変数係数の 2 階線形斉次差分方程式

$$y_{n+1} - a_n y_n + b_n y_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{5.344}$$

の一般解 (任意定数 f_0, z_0 を含む) は

$$y_0 = z_0, \tag{5.345}$$

$$y_n = f_0\, \tilde{y}_n \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \prod_{l=1}^{k} \frac{b_l \tilde{y}_{l-1}}{\tilde{y}_{l+1}} \right\} + z_0 \tilde{y}_n, \quad n \geq 1 \tag{5.346}$$

で与えられる。ここで $\tilde{y}_n$ は n 次行列式 (5.333) で表現されている。

注 このように一般解の表現が形式的に得られたが，問題はこれで終わりではない。形式解 (5.346) はどういう意味があるのか？または何の役に立つのか？を追求する必要がある。y_n を数値的に計算する目的のためには差分方程式 (漸化式) を直接使って計算する方が速い。今のところ形式解は純理論的興味 (たとえば，この解はどのような極限操作で微分方程式の解と一致するか？) などのためにしか役に立っていないが，将来は応用面でも役に立つことがあると確信している。 □

演習問題 9 差分方程式

$$y_{n+1} - 2\cos\ \theta y_n + y_{n-1} = 0$$

の一つの解は $\cos\ \theta n$ である。この解と線形独立な解 $\sin\ \theta n$ を階数低下法を使って求めよ。

演習問題 10 次の差分方程式の初期値問題を解け。

$$(n+3)(n+2)y_{n+2} + (n+2)(n+1)y_{n+1} - ny_n = 0, \quad y_1 = 1,\ y_2 = -\frac{1}{2}$$

をカンを使って解け ($y_3, y_4, \cdots$ を計算し，一般項を推定してこれを証明する)。

演習問題 11a 次の差分方程式の初期値問題

$$y_{n+2} + y_{n+1} - \frac{y_n}{n+1} = 0, \quad y_0 = 2,\ y_1 = -3$$

をカンを使って解け。

演習問題 11b 同じ差分方程式で初期値が異なる問題

$$y_{n+2} + y_{n+1} - \frac{y_n}{n+1} = 0, \quad y_0 = 1,\ y_1 = 1$$

をカンを使って解け (これは難しい)。カンを使っても解けない場合は演習問題 11a の解を利用して，階数低下法により新しい解を求め，初期値問題を解け。

5.5.5 N 階線形差分方程式の特解

最後に N 階線形差分方程式

$$y_{n+N} + p_{N-1} y_{n+N-1} + p_{N-2} y_{n+N-2} + \cdots + p_0 y_n = r_n \tag{5.347}$$

の特解の求め方を勉強する。ここで p_k $(k=0,1,2,\cdots,N-1)$ は n の関数でもよい。N 階の差分方程式でも 2 階のときと方法は全く同じである。ただ記述の仕方を少し天下りにする。なぜこうするのか？何をやっているかは 2 階の差分方程式の計算から理解できると思う。計算結果を先に仮定して解であることを後で証明するのである。この方が証明の記述が簡潔になるので数学者には好まれるが，初心者には理解するのが難しくなる。

まず，式 (5.347) の斉次方程式

$$y_{n+N}+p_{N-1}y_{n+N-1}+p_{N-2}y_{n+N-2}+\cdots+p_0y_n=0 \tag{5.348}$$

の N 個の線形独立な解 $\tilde{y}_n^{(1)},\tilde{y}_n^{(2)},\cdots,\tilde{y}_n^{(N)}$ と未知関数 $c_n^{(1)},c_n^{(2)},\cdots,c_n^{(N)}$ を使って式 (5.347) の特解を

$$y_n=c_n^{(1)}\tilde{y}_n^{(1)}+c_n^{(2)}\tilde{y}_n^{(2)}+\cdots+c_n^{(2)}\tilde{y}_n^{(N)} \tag{5.349}$$

と表し，これが式 (5.347) の解になるように $c_n^{(1)},c_n^{(2)},\cdots,c_n^{(N)}$ を定める。このため天下りに

$$\Delta_{+n}c_n^{(k)}=c_{n+1}^{(k)}-c_n^{(k)},\quad (k=1,2,\cdots,N) \tag{5.350}$$

とおき，$\Delta_{+n}c_n^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,N)$ が N 元連立 1 次方程式

$$\Delta_{+n}c_n^{(1)}\tilde{y}_{n+1}^{(1)}+\Delta_{+n}c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(2)}+\cdots+\Delta_{+n}c_n^{(N)}\tilde{y}_{n+1}^{(N)}=0 \tag{5.351}$$

$$\Delta_{+n}c_n^{(1)}\tilde{y}_{n+2}^{(1)}+\Delta_{+n}c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(2)}+\cdots+\Delta_{+n}c_n^{(N)}\tilde{y}_{n+2}^{(N)}=0 \tag{5.352}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Delta_{+n}c_n^{(1)}\tilde{y}_{n+N}^{(1)}+\Delta_{+n}c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(2)}+\cdots+\Delta_{+n}c_n^{(N)}\tilde{y}_{n+N}^{(N)}=r_n \tag{5.353}$$

の解であると仮定する。これらの式は式 (5.302),(5.303) の一般化である。次に，この仮定の下で表現式 (5.349) が式 (5.347) の解であることを示す。まず，次の関係が成り立つ。

$$y_{n+1}=c_{n+1}^{(1)}\tilde{y}_{n+1}^{(1)}+c_{n+1}^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(2)}+\cdots+c_{n+1}^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(N)} \tag{5.354}$$

$$=c_n^{(1)}\tilde{y}_{n+1}^{(1)}+c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(2)}+\cdots+c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(N)}$$
$$+\left(\Delta c_n^{(1)}\tilde{y}_{n+1}^{(1)}+\Delta c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(2)}+\cdots+\Delta c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(N)}\right) \tag{5.355}$$

$$=c_n^{(1)}\tilde{y}_{n+1}^{(1)}+c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(2)}+\cdots+c_n^{(2)}\tilde{y}_{n+1}^{(N)} \tag{5.356}$$

さらに，この関係式を使うと次式が成り立つ。

$$y_{n+2} = c_{n+1}^{(1)}\tilde{y}_{n+2}^{(1)} + c_{n+1}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(2)} + \cdots + c_{n+1}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(N)} \tag{5.357}$$

$$= c_{n}^{(1)}\tilde{y}_{n+2}^{(1)} + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(2)} + \cdots + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(N)} + \left(\Delta c_{n}^{(1)}\tilde{y}_{n+2}^{(1)} + \Delta c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(2)} + \cdots + \Delta c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(N)}\right) \tag{5.358}$$

$$= c_{n}^{(1)}\tilde{y}_{n+2}^{(1)} + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(2)} + \cdots + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+2}^{(N)} \tag{5.359}$$

以下これを繰り返すと

$$y_{n+k} = c_{n}^{(1)}\tilde{y}_{n+k}^{(1)} + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+k}^{(2)} + \cdots + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+k}^{(N)}, \qquad 1 \geq k \geq N-1 \tag{5.360}$$

$$y_{n+N} = c_{n+1}^{(1)}\tilde{y}_{n+N}^{(1)} + c_{n+1}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(2)} + \cdots + c_{n+1}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(N)} \tag{5.361}$$

$$= c_{n}^{(1)}\tilde{y}_{n+N}^{(1)} + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(2)} + \cdots + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(N)} + \left(\Delta c_{n}^{(1)}\tilde{y}_{n+N}^{(1)} + \Delta c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(2)} + \cdots + \Delta c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(N)}\right) \tag{5.362}$$

$$= c_{n}^{(1)}\tilde{y}_{n+N}^{(1)} + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(2)} + \cdots + c_{n}^{(2)}\tilde{y}_{n+N}^{(N)} + r_n \tag{5.363}$$

が得られる。これらの結果より，表現式 (5.349) は確かに N 次線形差分方程式 (5.347) の解になっていることがわかる。一方，$\Delta_{+n}c_n^{(k)}$ $(k=1,2,\cdots,N)$ は N 元連立 1 次方程式を満たすので，解はクラメールの公式により行列式 (カソラティ行列式とよばれる)

$$C_n = C\left(\tilde{y}_n^{(1)}, \tilde{y}_n^{(2)}, \cdots, \tilde{y}_n^{(N)}\right) \tag{5.364}$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{y}_n^{(1)} & \tilde{y}_n^{(2)} & \cdots & \tilde{y}_n^{(N)} \\ \tilde{y}_{n+1}^{(1)} & \tilde{y}_{n+1}^{(2)} & \cdots & \tilde{y}_{n+1}^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{y}_{n+N-1}^{(1)} & \tilde{y}_{n+N-1}^{(2)} & \cdots & \tilde{y}_{n+N-1}^{(N)} \end{vmatrix} \tag{5.365}$$

を使って

$$\Delta_{+n}c_n^{(1)} = \frac{1}{C_{n+1}} \begin{vmatrix} 0 & \tilde{y}_{n+1}^{(2)} & \cdots & \tilde{y}_{n+1}^{(N)} \\ 0 & \tilde{y}_{n+2}^{(2)} & \cdots & \tilde{y}_{n+2}^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_n & \tilde{y}_{n+N}^{(2)} & \cdots & \tilde{y}_{n+N}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{5.366}$$

$$\Delta_{+n}c_n^{(2)} = \frac{1}{C_{n+1}}\begin{vmatrix} \tilde{y}_{n+1}^{(1)} & 0 & \cdots & \tilde{y}_{n+1}^{(N)} \\ \tilde{y}_{n+2}^{(1)} & 0 & \cdots & \tilde{y}_{n+2}^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{y}_{n+N}^{(1)} & r_n & \cdots & \tilde{y}_{n+N}^{(N)} \end{vmatrix}, \tag{5.367}$$

$\cdots\cdots$

$$\Delta_{+n}c_n^{(N)} = \frac{1}{C_{n+1}}\begin{vmatrix} \tilde{y}_{n+1}^{(1)} & \tilde{y}_{n+1}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \tilde{y}_{n+2}^{(1)} & \tilde{y}_{n+2}^{(2)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{y}_{n+N}^{(1)} & \tilde{y}_{n+N}^{(2)} & \cdots & r_n \end{vmatrix} \tag{5.368}$$

(5.369)

または

$$\Delta_{+n}c_n^{(j)} = r_n \frac{C_{n+1}^{(j)}}{C_{n+1}}, \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{5.370}$$

で与えられる。ここで， $C_n^{(j)}$ はカソラティ行列式 C_n の $\tilde{y}_{n+N-1}^{(j)}$ における余因子である。この式を和分して特解 y_n の表現は次式

$$y_n = \sum_{j=1}^{N} c_n^{(j)} \tilde{y}_n^{(j)} \tag{5.371}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \tilde{y}_n^{(j)} \sum_{k=0}^{n} r_{k-1} \frac{C_k^{(j)}}{C_k} \tag{5.372}$$

で与えられる。前と同じ理由で k についての和分の下限は任意でよい。

5.6　母関数の方法と z−変換

線形差分方程式 (漸化式) 初期値問題の面白い解法として母関数 (または生成関数 (generating function)) の方法や z−変換法とよばれるものがある。この方法では解 f_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を直接求めるのではなく z のべき級数

$$\sum_{k \geq 0} f_k z^k \tag{5.373}$$

を利用する。母関数の方法は主に組合せ理論で用いられている。

一方，z–変換法は通信工学において離散信号を解析する基本的手段として最近急速に利用されている。これはラプラス変換法の差分版である。

どちらも計算法としては同じ方法であるが，べき級数 (5.372) に対する見方が全く違っている。

1. 組合せ理論では，これらの級数は形式的べき級数 (formal power series) であると考える。“形式的”というのは，z が特定の値をとることに関心がなく，また収束・発散の問題を無視するからである。べき級数の項 z^k は単に f_k が書かれている場所を示すにすぎないと考える。

2. 一方 z–変換法ではべき級数を

$$F(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^{-k} \tag{5.374}$$

で表し，この級数が少なくとも一つの (有限な) 複素数 z に対して収束するという仮定のもとで $F(z)$ を数列 $\{f_k\}$ の z–変換と定義する。また $z = e^{jnk(2\pi/N)}$, $j = \sqrt{-1}$ とおくと z–変換は離散フーリエ変換に等しくなり，境界値問題にも応用される。

この考え方の違いは次の理由によるものと思われる。

1. 組合せ理論では，閉じた厳密な式を求めるのが主な目的である。また母関数を定義しているべき級数の係数 f_k 自身に組合せ的意味があり，母関数上の種々の演算にも組合せ論的に意味がある。たとえ厳密な正当性の保証なしに式を導いても，別の方法で (たとえば帰納法を使って) 結果が正しいかどうかチェックすることができる。

2. これに対して z–変換法では工学上の現実的問題を扱うことが多い。方程式も複雑で，厳密解ではなく近似解を求めることで満足しなければならないことが多い。級数の収束性が保証されていない領域で近似計算を行うことは非常に危険である。

蛇足 どんな危険があるか？ たとえば展開式

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \tag{5.375}$$

を

$$\frac{1}{1-z} \approx 1 + z + z^2 + z^3 \tag{5.376}$$

で近似し，$z=2$ を代入して

$$\frac{1}{1-z} \approx 15 \quad at \;\; z=2 \tag{5.377}$$

すなわち“ $-1 \approx 15$ ”と結論するようなことが起こる。 □

なお，組合せ理論では，上のべき級数 (5.373) の他に，指数関数型母関数 (exponential generating function) とよばれるべき級数

$$\sum_{k \geq 0} \frac{f_k z^k}{k!} \tag{5.378}$$

も利用する。この母関数に対応する変換は (著者の知る限り) z–変換法では利用されていない。

5.6.1 母関数の方法による差分方程式の解法

母関数の方法を詳しく解説する余裕がないので，例題を使って説明する。$\cdots$ といっても解法を示すだけであるが。

例 1a フィボナッチ数列

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0, \quad f_0 = 0, f_1 = 1 \tag{5.379}$$

の母関数

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n \tag{5.380}$$

と指数関数型母関数

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n x^n}{n!} \tag{5.381}$$

を求めよ。

まず，式 (5.379) に x^n を掛けて n で 0 から ∞ までの和をとり

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+2} - f_{n+1} - f_n) x^n = 0 \tag{5.382}$$

各項を計算する。母関数の定義と初期値 ($f_0 = 0, f_1 = 1$) より

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^n = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^{n+1} \tag{5.383}$$

$$= x^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - f_0\right) \tag{5.384}$$

$$= x^{-1}G(x), \tag{5.385}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}x^n = x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}x^{n+2} \tag{5.386}$$

$$= x^{-2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n - f_0 - f_1 x\right) \tag{5.387}$$

$$= x^{-2}(G(x) - x) \tag{5.388}$$

となる。これを式 (5.382) に代入すると $G(x)$ に対する方程式

$$x^{-2}(G(x) - x) - x^{-1}G(x) - G(x) = 0 \tag{5.389}$$

が得られる。

不思議なことに差分方程式 (5.379) が $G(x)$ に対する代数方程式に化けたのである。

この式を解いて (これは簡単), 母関数

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} \tag{5.390}$$

が求められた。

次に指数型関数母関数を求める。まず, 式 (5.379) に $\frac{x^n}{n!}$ を掛けて n で 0 から ∞ までの和をとり

$$\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+2} - f_{n+1} - f_n)\frac{x^n}{n!} = 0 \tag{5.391}$$

各項を計算する。指数型母関数の定義と初期値 ($f_0 = 0, f_1 = 1$) より

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5.392}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} - f_0\right) \tag{5.393}$$

$$= \frac{d}{dx} H(x), \tag{5.394}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \frac{x^n}{n!} = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} \tag{5.395}$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} - f_0 - f_1 x\right) \tag{5.396}$$

$$= \frac{d^2}{dx^2} H(x), \tag{5.397}$$

となる。これを式 (5.391) に代入すると $H(x)$ に対する微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2} H(x) - \frac{d}{dx} H(x) - H(x) = 0 \tag{5.398}$$

が得られる。

不思議なことに，この場合は差分方程式 (5.379) が $H(x)$ に対する微分方程式に化けている。初期値は指数関数型母関数の定義より $H(x)|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{dH(x)}{dx}\right|_{x=0} = 1$ である。

この微分方程式を解いて，指数関数型母関数

$$H(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \tag{5.399}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{5.400}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5.401}$$

が求められた。

例 1b　フィボナッチ数列の母関数よりフィボナッチ数を求めよ。

母関数から数列を求めるには x^n の係数を計算する。このため

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2} \tag{5.402}$$

を部分分数に展開する。結果は上記の λ_1, λ_2 を使って

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{1}{1-\lambda_1 x} - \frac{1}{1-\lambda_2 x}\right) \tag{5.403}$$

である。この式の各項を展開して

$$G(x) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n)\,x^n \tag{5.404}$$

を得る。したがって，フィボナッチ数 f_n は x^n の係数より

$$f_n = \frac{{\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n}{\lambda_1-\lambda_2} \tag{5.405}$$

である。当然のことであるが，この解は前に求めた式 (5.153) と一致している。

次に指数関数型母関数 $H(x)$

$$H(x) = \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1-\lambda_2}, \tag{5.406}$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{5.407}$$

$$\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5.408}$$

からフィボナッチ数を求める。この場合は単に指数関数 $e^{\lambda x}$ を展開するだけで

$$H(x) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{({\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n)x^n}{n!} \tag{5.409}$$

(5.410)

を得る。したがって，フィボナッチ数 f_n は $\frac{x^n}{n!}$ の係数より

$$f_n = \frac{{\lambda_1}^n - {\lambda_2}^n}{\lambda_1-\lambda_2} \tag{5.411}$$

である。当然のことであるがこの解も前に求めた式 (5.153) と一致している。

演習問題 12　次の差分方程式を母関数の方法を使って解け。

1. $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 0, \quad f_0 = 1,\ f_1 = 1$
2. $f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n = 4^n, \quad f_0 = 0,\ f_1 = 1$
3. $2f_{n+1} - 3f_n + f_{n-1} = n, \quad f_0 = 0,\ f_1 = 1$

演習問題 13 次の連立差分方程式の解を母関数の方法を使って解け。

$$\begin{cases} f_{n+1} = 2f_n + g_n \\ g_{n+1} = f_n + 2g_n \end{cases}$$

初期値は $f_1 = 1,\ g_1 = 2$ である。二つの母関数を

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n$$

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$$

と定義せよ。

演習問題 14 次の差分方程式の指数関数型母関数を求めよ。

1. $f_{n+1} = f_n + n f_{n-1}, \quad f_0 = 1, f_1 = 1$

2. $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} - \delta_{n,1}$

ここで B_n はベルヌーイ数で $B_0 = 1, B_1 = \frac{1}{2}, \cdots$ である。

演習問題 15 1. 和分演算子

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

のとき,

$$\frac{F(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k x^n$$

を示せ。

2. 差分演算子

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n x^n}{n!}$$

のとき,

$$e^{-x} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta_{+n} f_0 x^n}{n!}$$

を示せ。

3. 差分演算子

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

のとき，

$$\frac{1}{1+x}F\left(\frac{x}{1+x}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\Delta_{+n}f_0 x^n$$

を示せ。ここで

$$\begin{aligned}\Delta_{+n}f_0 &= \Delta_{+n}f_n|_{n=0}\\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f_k\end{aligned}$$

である。

ヒント　和分公式

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} f(k,l)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k+l=n} f(k,l),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} f(k,l)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} f(k,l)$$

$$\frac{1}{(1+x)^{l+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{l+k}{k}(-x)^k$$

を使う。

演習問題 16　次の差分方程式を母関数の方法を使って解け。

1. $f_n-nf_{n-1}=b_n,\quad f_0=b_0$
2. $f_{n+1}=n(f_n+f_{n-1}),\quad f_0=1,\ f_1=0$

5.6.2 線形偏差分方程式の解法

独立変数 x の関数 $f(x)$ に対する微分方程式を常微分方程式といい，独立変数を二つ以上を含む関数 $f(x,y,\cdots)$ に対する微分方程式を偏微分方程式という。独立変数を二つ以上を含む関数 $f(x,y,\cdots)$ に対する差分方程式を偏差分方程式 (または差分・差分方程式) とよぶ。

線形偏差分方程式の解法を詳しく解説する余裕がないので，簡単な例題を使って説明する。… といっても解法を示すだけである。

次の線形偏差分方程式を解け。

$$f_n^{m+1} - f_n^m = \delta\, n\, f_{n-1}^m, \quad f_n^0 = \delta_{n,0} \tag{5.412}$$

まず m を固定して，指数型母関数 $H^m(z)$ を次式で定義する (今のところ，指数型にするか通常型にするかは計算してみないとわからない)。

$$H^m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n^m z^m}{n!}, \quad m \geq 0 \tag{5.413}$$

式 (5.412) に x^n を掛けて n で 0 から ∞ までの和をとり各項を計算する。ここで， $f_n^m = 0,\ n < 0,\ m \geq 0$ を仮定すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, f_{n-1}^m \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z f_{n-1}^m \frac{z^{(n-1)}}{(n-1)!} \tag{5.414}$$

$$= zH^m(z) \tag{5.415}$$

となる。これを式 (5.412) に代入すると $H^m(x)$ に対する差分方程式

$$H^{m+1}(z) - H^m(z) = \delta z H^m(z) \tag{5.416}$$

または

$$H^{m+1}(z) = (1 + \delta z) H^m(z) \tag{5.417}$$

が得られる。初期値は $f_n^0 = \delta_{n,0}$ より $H^0(z) = 1$ であるので解は

$$H^m(z) = (1 + \delta z)^m \tag{5.418}$$

$$= \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} (\delta z)^n \tag{5.419}$$

と表される。したがって，式 (5.412) の解は

$$f_n^m = \frac{m!}{(m-n)!} \tag{5.420}$$

となる。展開式 (5.419) より $\binom{m}{n} = 0,\ n \leq 0$ であるので，仮定 $f_n^m = 0,\ n < 0,\ m \geq 0$ は正しかったことがわかる。

演習問題 17 次の偏差分方程式を解け。

$$f_n^{m+1} - f_n^m = \delta\, f_{n-1}^{m+1}, \quad f_n^0 = \delta_{n,0}$$

ここで $\delta_{n,k}$ はクロネッカーのデルタ ($n = k$ のとき 1，それ以外は 0) である。

演習問題 18 次の偏差分方程式を解け。

$$f_n^{m+1} - f_n^m = q_n\, f_{n-1}^m, \quad f_n^0 = \delta_{n,0}$$

この問題は難しい。母関数の方法は使えない。m, n が小さいときの f_n^m の値を手で計算して求め，一般式を推定し，後で証明する。

A

差分商の対称な表現式

基準点 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ における n 階の不等間隔差分商は，次式のように引き数 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ について対称な形式に表現される。

$$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{l_k(x_k)} \tag{A.1}$$

ここで

$$\begin{aligned} l_k(x_k) &= (x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n) \\ &= x_k^{(n+1,0,\hat{k})} \end{aligned} \tag{A.2}$$

である。この表現式を数学的帰納法を使って証明する。

まず $n = 1$ のとき上式の左辺は

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{A.3}$$

であり，右辺は

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{f(x_k)}{l_k(x_k)} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \tag{A.4}$$

となって確かに成立している。いま $n = n_1 - 1$ のとき，任意の基準点に対して上式 (A.1) が成り立つ

$$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n_1-1}] = \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{f(x_k)}{x_k^{(n_1,0,\hat{k})}}, \tag{A.5}$$

$$f[x_1, x_2, x_3 \cdots, x_{n_1}] = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{f(x_k)}{x_k^{(n_1,1,\hat{k})}} \tag{A.6}$$

と仮定する。このとき定義式

$$x_k^{(n_1,0,\hat{k})} \equiv (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})\cdots(x_k - x_{n_1-1})$$

$$x_k^{(n_1,1,\hat{k})} \equiv (x_k - x_1)(x_k - x_2)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})\cdots(x_k - x_{n_1})$$

$$x_k^{(n_1+1,0,\hat{k})} \equiv (x_k - x_0)(x_k - x_1)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})(x_k - x_{k+2})\cdots(x_k - x_{n_1-1})(x_k - x_{n_1})$$

より，関係式

$$\frac{x_k^{(n_1+1,0,\hat{k})}}{x_k^{(n_1,0,\hat{k})}} - \frac{x_k^{(n_1+1,0,\hat{k})}}{x_k^{(n_1,1,\hat{k})}} = (x_k - x_{n_1}) - (x_k - x_0) \tag{A.7}$$

$$= x_0 - x_{n_1} \tag{A.8}$$

を得る。したがって

$$\frac{1}{x_k^{(n_1,0,\hat{k})}} - \frac{1}{x_k^{(n_1,1,\hat{k})}} = \frac{x_0 - x_{n_1}}{x_k^{(n_1+1,0,\hat{k})}} \tag{A.9}$$

である。この結果を利用すると

$$f[x_0, x_1, x_2 \cdots, x_{n_1}]$$

$$= (x_0 - x_{n_1})^{-1}\left\{f[x_0, x_1, x_2 \cdots, x_{n_1-1}] - f[x_1, x_2, x_3 \cdots, x_{n_1}]\right\} \tag{A.10}$$

$$= (x_0 - x_{n_1})^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{f(x_k)}{x_k^{(n_1,0,\hat{k})}} - \sum_{k=1}^{n_1} \frac{f(x_k)}{x_k^{(n_1,1,\hat{k})}}\right\} \tag{A.11}$$

$$= (x_0 - x_{n_1})^{-1}\left\{\frac{f(k_0)}{x_0^{(n_1,0,\hat{0})}} + \sum_{k=1}^{n_1-1} f(x_k)\left[\frac{1}{x_k^{(n_1,0,\hat{k})}} - \frac{1}{x_k^{(n_1,1,\hat{k})}}\right] - \frac{f(x_{n_1})}{x_{n_1}^{(n_1+1,0,\hat{n}_1)}}\right\}$$

ここで関係式

$$x_0^{(n_1,0,\hat{0})}(x_0 - x_{n_1}) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\cdots(x_0 - x_{n_1}) = x_0^{(n_1+1,0,\hat{0})}$$

$$(x_{n_1} - x_0)x_{n_1}^{(n_1+1,1,\hat{n}_1)} = (x_{n_1} - x_0)(x_{n_1} - x_1)\cdots(x_{n_1} - x_{n_1-1}) = x_{n_1}^{(n_1+1,0,\hat{n}_1)}$$

を使うと

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \frac{f(x_k)}{x_k^{(n_1+1,0,\hat{k})}} \tag{A.12}$$

となり，$n = n_1$のときに式（A.1）が成立している。したがって，数学的帰納法により，任意の n に対して式（A.1）が成立する。 ■

B

不等間隔差分商のライプニッツの公式

関数の積の不等間隔差分商に対するライプニッツの公式は，B-スプライン (basic spline) におけるドブァ・コックスの算法の導出において基本的である。普通は数学的帰納法と関数の微分可能性を使って証明するが，ここでは公式の構造を理解するために，帰納法と微分可能性を使わない直接的な証明を与える。まず次の公式 1, 2, 3, 4

1. 三重和の公式

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=k}^{n} g(i)P(i,k)h(j)Q(j,k)$$

$$= \sum_{0\leq i\leq j\leq n} g(i)h(j) \sum_{i\leq k\leq j} P(i,k)Q(j,k) \tag{B.1}$$

ここで n は自然数，$g(i), h(j), P(i,k), Q(j,k)$ はそれぞれ自然数 i, j, k を引き数とする任意関数である。

2. n 重積の差分公式

$$\Delta_x^{(k,0)} x^{(n+1,0,\hat{i})}|_{x=x_k} = x_i^{(n-k,k+1)}, \tag{B.2}$$

3. n 重積の等式 1

$$\sum_{i\leq k\leq j} x_j^{(k,0)} x_i^{(n-k,k+1)} = \delta_{i,j} x_j^{(n+1,0,\hat{j})}, \tag{B.3}$$

ここで，$\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである。

4. n 重積の等式 2

$$\sum_{i\leq k\leq j} \frac{1}{x_i^{(k+1,0,\hat{i})} x_j^{(n-k+1,k,\hat{j})}} = \delta_{i,j} \frac{1}{x_i^{(n+1,0,\hat{i})}} \tag{B.4}$$

を証明する。

式 (B.1) の証明　次の二重和の公式 (i_0 は固定)

$$\sum_{i_0 \le k \le j} f(i_0, j, k) = \sum_{k=i_0}^{n} \sum_{j=k}^{n} f(i_0, j, k) \tag{B.5}$$

$$= \sum_{j=i_0}^{n} \sum_{k=i_0}^{j} f(i_0, j, k) \tag{B.6}$$

を 2 回使うと三重和の公式

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=k}^{n} f(i, j, k) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} \sum_{j=k}^{n} f(i, j, k) \tag{B.7}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \sum_{k=i}^{j} f(i, j, k) \tag{B.8}$$

$$= \sum_{0 \le i \le j \le n} \sum_{i \le k \le j} f(i, j, k) \tag{B.9}$$

が得られる。この三重和の公式に $f(i,j,k) = g(i)P(i,k)h(j)Q(j,k)$ を代入したのが式 (B.1) である。 ■

式 (B.2) の証明　まず $i > k$ のときを調べる。

$$\Delta_x^{(k,0)} x^{(n+1,0,\hat{i})}|_{x=x_k} \tag{B.10}$$

は

1. $k > n$ では $k-1$ 次以下の多項式の k 次差分であるので 0,
2. $k < n$ では代入 $x = x_k$によって 0,

したがって，$i \le k$ の場合だけを考える。

Appendix A で示した不等間隔差分商の対称な表現式 ($x_0 = x$)

$$\Delta_x^{(k,0)} f(x)|_{x=x_k} = f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{x_j^{(k+1,0,\hat{j})}} \tag{B.11}$$

を利用すると

$$\Delta_x^{(k,0)} x^{(n+1,0,\hat{i})}|_{x=x_k} = \sum_{j=0}^{k} \frac{x_j^{(n+1,0,\hat{i})}}{x_j^{(k+1,0,\hat{j})}} \tag{B.12}$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \delta_{i,j} \frac{x_j^{(n+1,0,\hat{i})}}{x_j^{(k+1,0,\hat{j})}} \tag{B.13}$$

$$= \frac{x_i^{(n+1,0,\hat{i})}}{x_i^{(k+1,0,\hat{i})}} \tag{B.14}$$

$$= x_i^{(n-k,k+1)} \tag{B.15}$$

となり，式（B.2）が証明された。 ■

式 (B.3) の証明　n 重積の定義

$$x^{(n,k)} = (x - x_k)(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_{n+k-1}) \tag{B.16}$$

より

$$x_j^{(n,k)} = 0, \qquad k \leq j < n + k \tag{B.17}$$

である。したがって，不等間隔差分商の恒等式 (テーラー展開式)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{(k,0)} \Delta_x^{(k,0)} f(x)|_{x=x_k} + x^{(n,0)} \Delta_x^{(n,0)} f(x)$$

に $f(x) = x^{(n+1,0,\hat{i})}$ を代入すると

$$x^{(n+1,0,\hat{i})} = \sum_{k=0}^{n} x^{(k,0)} \Delta_x^{(k,0)} x^{(n+1,0,\hat{i})}|_{x=x_k} \tag{B.18}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^{(k,0)} x_i^{(n-k,k+1)}, \qquad \text{式（B.3）により} \tag{B.19}$$

$$= \sum_{k=i}^{n} x^{(k,0)} x_i^{(n-k,k+1)}, \qquad (0 \leq i \leq n) \tag{B.20}$$

を得る。この式に $x = x_j$, $j \neq i$ を代入すると

$$\sum_{k=i}^{n} x_j^{(k,0)} x_i^{(n-k,k+1)} = 0, \qquad (0 \leq i < j \leq n) \tag{B.21}$$

である。$j = i$ のとき $x = x_i$ を代入すると

$$x_i^{(k,0)} x_i^{(n-k,k+1)} = x_i^{(n+1,0,\hat{i})} \tag{B.22}$$

である。これらの式をまとめて式（B.3）を得る。 ■

式 (B.4) の証明　n 重積の関係式

$$x_i^{(n+1,0,\hat{i})} = x_i^{(k+1,0,\hat{i})} x_i^{(n-k,k+1)}, \quad 0 \le i \le k+1 \le n \tag{B.23}$$

$$x_j^{(n+1,0,\hat{j})} = x_j^{(k,0)} x_j^{(n-k+1,k,\hat{j})}, \quad 0 \le k \le j \le n \tag{B.24}$$

を使って式 (B.3)

$$\sum_{i \le k \le j} x_j^{(k,0)} x_i^{(n-k,k+1)} = \delta_{i,j} x_j^{(n+1,0,\hat{j})}, \tag{B.25}$$

の両辺を $x_i^{(n+1,0,\hat{i})} x_j^{(n+1,0,\hat{j})}$ で割ると

$$\sum_{i \le k \le j} \frac{1}{x_i^{(k+1,0,\hat{i})} x_j^{(n-k+1,k,\hat{j})}} = \delta_{i,j} \frac{1}{x_i^{(n+1,0,\hat{i})}} \tag{B.26}$$

となる。これが式 (B.4) である。■

さて，関数 $g(x), h(x)$ の積 $f(x) = g(x)h(x)$ に対するライプニッツの差分則は，規準点を $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ と選ぶと

$$f[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} g[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-k}] h[x_{n-k}, x_{n-k+1}, \cdots, x_n] \tag{B.27}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} g[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k] h[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n] \tag{B.28}$$

である。この式は $x = x_0$ と記すと

$$\Delta_x^{(n,1)} g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n} [\Delta_x^{(n-k,1)} g(x)][\Delta_x^{(k,n-k+1)} h(x_{n-k})] \tag{B.29}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} [\Delta_x^{(k,1)} g(x)][\Delta_x^{(n-k,k+1)} h(x_k)] \tag{B.30}$$

と表記される。この式を証明する。

Appendix A で示した不等間隔差分の対称な表現式

$$\Delta_x^{(k,1)} g(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{g(x_i)}{x_i^{(k+1,0,\hat{k})}}, \qquad \text{規準点は } x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k$$

$$\Delta_x^{(n-k,k+1)} h(x_k) = \sum_{j=k}^{n} \frac{h(x_j)}{x_j^{(n-k+1,k,\hat{j})}}, \qquad \text{規準点は } x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n$$

を式 (B.28) の右辺に代入すると

$$\sum_{k=0}^{n} g[x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k] h[x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{g(x_i)}{x_i^{(k+1,0,\hat{i})}} \right] \left[\sum_{j=k}^{n} \frac{h(x_j)}{x_j^{(n-k+1,k,\hat{j})}} \right] \tag{B.31}$$

である。ここで三重和の公式 (B.1) を使うと

$$= \sum_{0 \le i \le j \le n} g(x_i) h(x_j) \left[\sum_{i \le k \le j} \frac{1}{x_i^{(k+1,0,\hat{i})} x_j^{(n-k+1,k,\hat{j})}} \right] \tag{B.32}$$

さらに，n 重積の等式 2(B.4) により

$$= \sum_{0 \le i \le n} \frac{g(x_i) h(x_i)}{x_i^{(n+1,0,\hat{i})}} \tag{B.33}$$

$$= \Delta_x^{(n,1)} g(x) h(x) \tag{B.34}$$

となる。これは，式 (B.28) の左辺である。したがって，ライプニッツの公式 (B.28) が証明された。 ■

C

スターリング数の一般化

x の n 重積を用いてスターリング数を一般化し，さらに差分化された指数関数との関係についても述べる。

C.1　一般化スターリング数の定義

x の n 重積

$$x^{(n,j)} = (x - p_j)(x - p_{j+1}) \cdots (x - p_{j+n-1})$$

を用いて，スターリング数を一般化する。次式

$$x^{(n,j)} = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j} (-1)^{n-r} x^r \tag{C.1}$$

$$x^n = \sum_{r=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j} x^{(r,j)} \tag{C.2}$$

により係数 $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j}$, $\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j}$ を定義し，$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j}$ を一般化第 1 種スターリング数，$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j}$ を一般化第 2 種スターリング数とよぶ。これらは $p_j, p_{j+1}, p_{j+2}, \cdots$ の多項式であり，たとえば $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{p,j} = p_{j+2}p_{j+1} + p_{j+2}p_j + p_{j+1}p_j$, $\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix}_{p,j} = {p_{j+1}}^2 + p_{j+1}p_j + {p_j}^2$ である。

$x^{(n,j)}$ のテーラー展開式

$$x^{(n,j)} = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{r!} \frac{d^r}{dx^r} x^{(n,j)} \bigg|_{x=0} \tag{C.3}$$

と，一般化第 1 種スターリング数の定義式 (C.1) を比較して

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j} = (-1)^{n-r} \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} x^{(n,j)} \bigg|_{x=0} \tag{C.4}$$

を得る。この式 (C.4) より

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j} = 0 \qquad (r > n) \tag{C.5}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_{p,j} = \prod_{k=0}^{n-1} p_{j+k} \qquad (n > 0) \tag{C.6}$$

であり，また漸化式

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ r \end{bmatrix}_{p,j} = p_{j+n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j} + \begin{bmatrix} n \\ r-1 \end{bmatrix}_{p,j} \tag{C.7}$$

を得る。同様にしてテーラー展開式

$$x^n = \sum_{r=0}^{n} x^{(r,j)} \Delta_x^{(r,j)} x^n \bigg|_{x=p_{j+r}} \tag{C.8}$$

と，一般化第 2 種スターリング数の定義式 (C.2) を比較して

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j} = \Delta_x^{(r,j)} x^n \bigg|_{x=p_{j+r}} \tag{C.9}$$

を得る。この式 (C.9) より

$$\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j} = 0 \qquad (r > n) \tag{C.10}$$

$$\begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix}_{p,j} = {p_j}^n \qquad (n > 0) \tag{C.11}$$

であり，また漸化式

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ r \end{Bmatrix}_{p,j} = p_{j+r} \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j} + \begin{Bmatrix} n \\ r-1 \end{Bmatrix}_{p,j} \tag{C.12}$$

を得る。

任意の非負整数 k に対し $p_{j+k} = k\epsilon$ とおけば $x^{(n,j)} = x^{\underline{n}}$ であるから，このとき $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}\epsilon^{n-r}$, $\begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j} = \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}\epsilon^{n-r}$ となる。

また，任意の非負整数 k に対し $p_{j+k} = \epsilon$ とおけば $x^{(n,j)} = (x-\epsilon)^n$ であるから，このとき $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j} = \begin{Bmatrix} n \\ r \end{Bmatrix}_{p,j} = \binom{n}{r}\epsilon^{n-r}$ となる。よって，一般化第 1 種·第 2 種スターリング数は，2 項係数の 2 種類の拡張ともいえる。

C.2 一般化スターリング数が満たす関係式

一般化第 1 種スターリング数は代数的には基本対称式，一般化第 2 種スターリング数は対称式であり，様々な関係式を満たす。たとえば不等間隔差分商によるライプニッツの公式を使うと，ヴァンデァモンドのたたみ込み式 (4.7) を拡張した

$$\begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix}_{p,j} = \sum_{0\le k\le n} \begin{bmatrix} r \\ n-k \end{bmatrix}_{p,j} \begin{bmatrix} s \\ k \end{bmatrix}_{p,j+r} \tag{C.13}$$

$$\begin{Bmatrix} r+s \\ n \end{Bmatrix}_{p,j} = \sum_{0\le k\le n} \begin{Bmatrix} r \\ n-k \end{Bmatrix}_{p,j} \begin{Bmatrix} s \\ k \end{Bmatrix}_{p,j+n-k} \tag{C.14}$$

が得られる。また，式 (C.9) を使うと，オイラーの恒等式 (2.214) は一般化第 2 種スターリング数を用いて

$$\sum_{0\le k\le n} \left({x_k}^r \Big/ \prod_{0\le s\le n, s\ne k} (x_k - x_s) \right) = \begin{Bmatrix} r \\ n \end{Bmatrix}_{x,0} \tag{C.15}$$

と拡張できる。

C.3 指数関数の差分化

指数関数 exp の不等間隔差分化を考える。差分化の手段としては，微分方程式を差分化することから始めることにする。

微分方程式

$$\frac{d}{dt} f(t) = af(t) \tag{C.16}$$

は，指数関数

$$f(t) = \exp(at + c_0) \tag{C.17}$$

$$= C_0 \exp(at) \tag{C.18}$$

を解にもつ。ただし c_0, C_0 は定数。式 (C.16) の不等間隔差分化を考える。連続変数 t を，点列 $t_j, t_{j+1}, \cdots$ にし，微分 $\frac{d}{dt}f(t)$ を前進差分に対応する不等間隔差分 $\frac{f(t_{j+1})-f(t_j)}{\delta_j}$ に置き換える。

$$\frac{f(t_{j+1})-f(t_j)}{\delta_j} = af(t_j) \tag{C.19}$$

ただし，$\delta_j = t_{j+1} - t_j$ である。これを解くと

$$f(t_{j+1}) = (1 + a\delta_j)f(t_j) \tag{C.20}$$

$$f(t_n) = f(t_0)\prod_{k=0}^{n-1}(1 + a\delta_k) \tag{C.21}$$

となる。$f(t_0)$ が任意定数の初期値であり，微分方程式の解である式 (C.18) の C_0 に相当する。

また，後退差分に対応する不等間隔差分で置き換えると

$$\frac{f(t_j)-f(t_{j-1})}{\delta_{j-1}} = af(t_j) \tag{C.22}$$

$$\frac{f(t_{j+1})-f(t_j)}{\delta_j} = af(t_{j+1}) \tag{C.23}$$

となり，微分方程式 (C.16) の差分化として式 (C.19) とは別種の差分方程式ができる。この厳密解は

$$f(t_n) = f(t_0)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1 - a\delta_k} \tag{C.24}$$

と求められる。

式 (C.21)，(C.24) において $\delta_k \to 0$，$n \to \infty$ と極限をとれば，いずれも $f(t) = C_0\exp(at)$ に一致する。したがって，exp 関数式 (C.18) の差分化として式 (C.21) と式 (C.24) の 2 種類が考えられる。

差分化指数関数式 (C.21)

$$f(t_n) = f(t_0)\prod_{k=0}^{n-1}(1 + a\delta_k)$$

は，定数 a で展開できる。a^{n-r} の係数を $C[n, r]$ とおいて

$$\prod_{k=0}^{n-1}(1 + a\delta_k) = \sum_{r=0}^{n} C[n, r]a^{n-r} \tag{C.25}$$

とする。この $C[n, r]$ について考察する。

式 (C.25) は差分方程式 (C.19) の解であるので，代入すると

$$\sum_{r=0}^{n+1} C[n+1,r]a^{n+1-r} = \delta_n \sum_{r=0}^{j} C[n,r]a^{n+1-r} + \sum_{r=0}^{n} C[n,r]a^{n-r}$$

となる。両辺の a^{n+1-r} の係数を比較すると

$$C[n+1,r] = \delta_n C[n,r] + C[n,r-1] \tag{C.26}$$

を得る。また，展開式 (C.25) により，任意の l に対し

$$C[l,0] = \prod_{k=0}^{l-1} \delta_k \tag{C.27}$$

は明らかである。以上により $C[n,r]$ は第 1 種一般化スターリング数の漸化式と同じ漸化式をもち，同じ初期値をもつので，$C[n,r] = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{\delta,0}$ である。つまり，差分化指数関数式 (C.21) は，第 1 種一般化スターリング数で展開することができる。

$$f(t_0)\prod_{k=0}^{n-1}(1+a\delta_k) = f(t_0)\sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{\delta,0} a^{n-r} \tag{C.28}$$

一方，差分化指数関数式 (C.24)

$$f(t_n) = f(t_0)\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-a\delta_k}$$

についても，定数 a で展開することを考える。形式的に，無限級数展開

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

により，a^{r-n} の係数を $\hat{C}[n,r]$ とおいて

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-a\delta_k} = \sum_{r=n-1}^{\infty} \hat{C}[r,n-1]a^{r-n+1} \tag{C.29}$$

とする。式 (C.29) は差分方程式 (C.23) の解であるので，代入すると

$$\sum_{r=n}^{\infty} \hat{C}[r,n]a^{r-n} = \delta_n \sum_{r=n}^{\infty} \hat{C}[r,n]a^{r-n+1} + \sum_{r=n-1}^{\infty} \hat{C}[r,n-1]a^{r-n+1} \tag{C.30}$$

となる。両辺の a^{r-n+1} の係数を比較すると

$$\hat{C}[r+1,n] = \delta_n \hat{C}[r,n] + \hat{C}[r,n-1] \tag{C.31}$$

を得る。また，展開式 (C.29) により，任意の l に対し

$$\hat{C}[l,0] = {\delta_0}^l \tag{C.32}$$

は明らかである。以上により $\hat{C}[r,n]$ は第2種一般化スターリング数の漸化式と同じ漸化式をもち，同じ初期値をもつので，$\hat{C}[r,n] = \left\{ \begin{matrix} r \\ n \end{matrix} \right\}_{\delta,0}$ である。つまり，差分化指数関数式 (C.24) は，第2種一般化スターリング数で展開することができる。

$$f(t_0) \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-a\delta_k} = f(t_0) \sum_{r=n-1}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} r \\ n-1 \end{matrix} \right\}_{\delta,0} a^{r-n+1} \tag{C.33}$$

C.4 その他

次の関係式は，スターリング数が満たす関係式[1]を一般化したものである。

I.

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_{p,j} = 1 \tag{C.34}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\}_{p,j} = 1 \tag{C.35}$$

II.

$$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}_{p,j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\prod_{l=0}^{n-1} p_{j+l}}{p_k} \tag{C.36}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}_{p,j} = \sum_{k=0}^{n-1} {p_j}^k {p_{j+1}}^{n-1-k} \tag{C.37}$$

III.

$$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_{p,j} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{j+k} \tag{C.38}$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\}_{p,j} = \sum_{k=0}^{n-1} p_{j+k} \tag{C.39}$$

---

[1] 参考文献 (翻訳書 1.) p.240 ∼ 241 など。

IV.

$$\begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix}_{p,j} = \sum_{k=1}^{m} p_{j+n+k} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_{p,j} + \prod_{k=0}^{n} p_{j+k} \quad \text{(C.40)}$$

$$\begin{Bmatrix} m+n+1 \\ m \end{Bmatrix}_{p,j} = \sum_{k=1}^{m} p_{j+k} \begin{Bmatrix} n+k \\ k \end{Bmatrix}_{p,j} + p_j{}^{n+1} \quad \text{(C.41)}$$

V.

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}_{p,j} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \prod_{i=k+1}^{n} p_{j+i} \quad \text{(C.42)}$$

$$\begin{Bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{Bmatrix}_{p,j} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} p_{j+m+1}{}^{n-k} \quad \text{(C.43)}$$

VI. 反転公式

$$f(n) = \sum_{k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,j} (-1)^k g(k) \quad \text{(C.44)}$$

$$g(n) = \sum_{k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_{p,j} (-1)^k f(k) \quad \text{(C.45)}$$

VII. デルタ関数

$$\Delta_x^{(k,j+1)} x^{(n,j)} \Big|_{x=p_j} = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_{p,j} \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix}_{p,j} (-1)^{n-r} \quad \text{(C.46)}$$

$$= \delta_{k,n} \quad \text{(C.47)}$$

(鈴森 康弘)

D

解　答

D.1　微分より差分へ

演習問題 1.　1. (左辺) $= \frac{3}{4}$, (右辺) $= c_1\frac{3}{4}$ より $c_1 = 1$。

参考： $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ と変形できるので,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$$

よって $c_1 = 1$ 。

2. (左辺) $= \frac{9}{40}$, (右辺) $= c_2\frac{9}{20}$ より $c_2 = \frac{1}{2}$。

参考： $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ と変形できるので,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)\end{aligned}$$

よって $c_2 = \frac{1}{2}$。

3. (左辺) $= \frac{19}{360}$，(右辺) $= c_3 \frac{19}{120}$ より $c_3 = \frac{1}{3}$。

参考：

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

と変形できるので，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right)$$

よって $c_3 = \frac{1}{3}$。

演習問題 2.

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} j}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} = \frac{8}{5}$$

$$(\text{右辺}) = \frac{2\cdot 4}{4+1} = \frac{8}{5}$$

演習問題 3.

$$(\text{左辺}) = \sum_{i=k}^{3} (f_{ii} + f_{i\ i+1} + \cdots + f_{i3})$$

$$= f_{11} + f_{12} + f_{13} + f_{22} + f_{23} + f_{33}$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{j=k}^{3} (f_{kj} + f_{k+1\ j} + \cdots + f_{jj})$$

$$= f_{11} + f_{12} + f_{22} + f_{13} + f_{23} + f_{33}$$

左辺の和 $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i}^{3} f_{ij}$ では，まず i を固定して，指定した範囲の中で j の和をとるので，(i, j) 平面上での和の順序は図 D.1左のようになる。

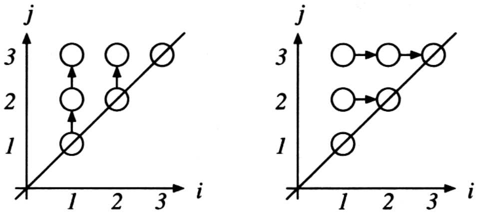


図 D.1　和の順序の交換

右辺の和 $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{j} f_{ij}$ では，まず j を固定して，指定した範囲の中で i の和をとるので，(i, j) 平面上での和の順序は図 D.1右のようになる。

演習問題 4.

$$(\text{左辺}) = f_{000} + f_{010} + f_{011} + f_{020} + f_{021} + f_{022} + f_{111} + f_{121} + f_{122} + f_{222}$$

$$(\text{右辺}) = (f_{000} + f_{010} + f_{020}) + (f_{011} + f_{021}) + (f_{111} + f_{121}) + f_{022} + f_{122} + f_{222}$$

演習問題 5.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 1 + \frac{x_3 - x_0}{x_0 - x_1} + \frac{x_3 - x_0}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_0 - x_2} + \frac{x_3 - x_0}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_0 - x_3} \\
&= \frac{x_3 - x_1}{x_0 - x_1} + \frac{x_3 - x_0}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_0 - x_2} + \frac{x_3 - x_0}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_0 - x_3} \\
&= \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{x_3 - x_0}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_0 - x_2} \cdot \frac{x_3 - x_2}{x_0 - x_3} \\
&= \frac{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_0 - x_3) + (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

演習問題 6.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=0}^{2} \left\{ \sum_{i=0}^{k} g(i)P(i,k) \right\} \left\{ \sum_{j=k}^{2} h(j)Q(j,k) \right\} \\
&= \{g(0)P(0,0)\}\{h(0)Q(0,0) + h(1)Q(1,0) + h(2)Q(2,0)\} \\
&\quad + \{g(0)P(0,1) + g(1)P(1,1)\}\{h(1)Q(1,1) + h(2)Q(2,1)\} \\
&\quad + \{g(0)P(0,2) + g(1)P(1,2) + g(2)P(2,2)\}\{h(2)Q(2,2)\}
\end{aligned}$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{0 \le i \le j \le 2} g(i)h(j) \left\{ \sum_{i \le k \le j} P(i,k)Q(j,k) \right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= g(0)h(0)\{P(0,0)Q(0,0)\} \\
&\quad + g(0)h(1)\{P(0,0)Q(1,0) + P(0,1)Q(1,1)\} \\
&\quad + g(0)h(2)\{P(0,0)Q(2,0) + P(0,1)Q(2,1) + P(0,2)Q(2,2)\} \\
&\quad + g(1)h(1)\{P(1,1)Q(1,1)\} \\
&\quad + g(1)h(2)\{P(1,1)Q(2,1) + P(1,2)Q(2,2)\} \\
&\quad + g(2)h(2)\{P(2,2)Q(2,2)\}
\end{aligned}
$$

演習問題 7.　1. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} f_{ij} = f_{12} + f_{13} + f_{23}$

2. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij} = f_{11} + f_{12} + f_{13} + f_{21} + f_{22} + f_{23} + f_{31} + f_{32} + f_{33}$

3. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} f_{ij} = f_{21} + f_{31} + f_{32}$

4. $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} f_{ij} = f_{11} + f_{12} + f_{22} + f_{13} + f_{23} + f_{33}$

5. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} f_{ij} = f_{11} + f_{12} + f_{13} + f_{22} + f_{23} + f_{33}$

6. $\sum_{1\le i,j\le n} f_{ij} = f_{11} + f_{12} + f_{13} + f_{21} + f_{22} + f_{23} + f_{31} + f_{32} + f_{33}$

7. $\sum_{1\le i\le j\le n} f_{ij} = f_{11} + f_{12} + f_{13} + f_{22} + f_{23} + f_{33}$

8. $\sum_{1\le i<j\le n} f_{ij} = f_{12} + f_{13} + f_{23}$

よって，1. と 8. ，2. と 6.，4. と 5. と 7. が等しい。

演習問題 8.　1. $V(n) = \frac{(n-1)n}{2}$ と考えられるので，

$$
\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \left(-\frac{0\cdot 1}{2} + \frac{1\cdot 2}{2}\right) + \left(-\frac{1\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 3}{2}\right) \\
&\quad + \cdots + \left(-\frac{(N-1)N}{2} + \frac{N(N+1)}{2}\right) \\
&= -\frac{0\cdot 1}{2} + \frac{N(N+1)}{2} \\
&= \frac{N(N+1)}{2}
\end{aligned}
$$

2. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ であるから，$V(n) = \sqrt{n}$ と考えられ，

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(-\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right) = -1 + \sqrt{N+1}$$

3. $V(n) = \dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$ と考えられるので，

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(-\frac{(n-1)n(n+1)}{3} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right) \\ &= \frac{N(N+1)(N+2)}{3} \end{aligned}$$

4. $V(n) = -\frac{2}{n}$ と考えられるので，

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{N+1} = \frac{2N}{N+1}$$

演習問題 9. $m, n > 0$ を考えた場合だけでも，

$$\begin{aligned} x^{\underline{m}} x^{\underline{n}} &= \{x(x-\epsilon)\cdots(x-(m-1)\epsilon)\}\{x(x-\epsilon)\cdots(x-(n-1)\epsilon)\} \\ x^{\underline{m+n}} &= x(x-\epsilon)\cdots(x-(m+n-1)\epsilon) \end{aligned}$$

であるから，$x^{\underline{m}} x^{\underline{n}} = x^{\underline{m+n}}$ は成り立たない。例は $m = 1, n = 1$ で十分であろう。同様に $m, n > 0$ として

$$\begin{aligned} x^{\overline{m}} x^{\overline{n}} &= \{x(x+\epsilon)\cdots(x+(m-1)\epsilon)\}\{x(x+\epsilon)\cdots(x+(n-1)\epsilon)\} \\ x^{\overline{m+n}} &= x(x+\epsilon)\cdots(x+(m+n-1)\epsilon) \end{aligned}$$

であるので，$x^{\overline{m}} x^{\overline{n}} = x^{\overline{m+n}}$ も成り立たない。また，m, n が負でも，定義式を見れば与式が成り立たないことは容易にわかる。
階乗べき関数においては，$0 < m < n$ とした上で，

$$\begin{aligned} x^{\underline{m+n}} &= x^{\underline{m}} \cdot (x - m\epsilon)^{\underline{n}} \\ x^{\underline{-(m+n)}} &= x^{\underline{-m}} \cdot (x + m\epsilon)^{\underline{-n}} \\ x^{\overline{m+n}} &= x^{\overline{m}} \cdot (x + m\epsilon)^{\overline{n}} \\ x^{\overline{-(m+n)}} &= x^{\overline{-m}} \cdot (x - m\epsilon)^{\overline{-n}} \end{aligned}$$

などとしなければならないであろう。

演習問題 10.

$$c_0 + c_1 x^{\underline{1}} + c_2 x^{\underline{2}} + c_3 x^{\underline{3}} + \cdots c_n x^{\underline{n}} = 0$$

とする。この式に $x=0$ を代入すれば，$c_0=0$ となる。
次に，この式を前進差分すると，

$$c_1+2c_2x^{\underline{1}}+3c_3x^{\underline{2}}+\cdots+nc_nx^{\underline{n-1}}=0$$

となり，この式に $x=0$ を代入すれば，$c_1=0$ となる。以下同じ手続きを繰り返せば，すべての係数 $c_m(m=0,1,2,\cdots,n)$ はすべて 0 になる。よって $x^{\underline{m}}$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ に対する線形独立性が証明された。
同様に，

$$c_0+c_1x^{\overline{1}}+c_2x^{\overline{2}}+c_3x^{\overline{3}}+\cdots c_nx^{\overline{n}}=0$$

とする。この式に $x=0$ を代入すれば，$c_0=0$ となる。
次に，この式を後退差分すると，

$$c_1+2c_2x^{\overline{1}}+3c_3x^{\overline{2}}+\cdots+nc_nx^{\overline{n-1}}=0$$

となり，この式に $x=0$ を代入すれば，$c_1=0$ となる。以下同じ手続きを繰り返せば，すべての係数 $c_m(m=0,1,2,\cdots,n)$ はすべて 0 になる。よって $x^{\overline{m}}$ $(m=0,1,2,\cdots,n)$ に対する線形独立性が証明された。

演習問題 11.　1. 差分間隔 $\epsilon=1$ として

$$\Delta_{+n}\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n(n+1)}$$

より，$V(n)=\left(-\frac{1}{n}\right)$ とすれば，$\Delta_{+n}V(n)=f(n)$ のとき

$\sum_{n=1}^{N}f(n)=V(N+1)-V(1)$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{N+1}=1-\frac{1}{N+1}$$

2. 差分間隔 $\epsilon=1$ として

$$\Delta_{+n}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n(n+1)}\right)=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

より，

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(N+1)(N+2)}\right)$$

3. 差分間隔 $\epsilon=1$ として

$$\Delta_{+n}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

より，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right)$$

一般化の場合： 差分間隔 $\epsilon = 1$ として

$$\Delta_{+n}\left(-\frac{1}{m}n^{\underline{-m}}\right) = n^{\underline{-m-1}}$$

より，

$$\sum_{n=1}^{N} n^{\underline{-m-1}} = -\frac{1}{m}\left\{(N+1)^{\underline{-m}} - 1^{\underline{-m}}\right\}$$

研究課題 1. $x^{((1))} = x$ と仮定すると，$x^{((-1))} = \frac{1}{x}$ である。

$$x^{((-2))} = -\Delta_x x^{((-1))} = \frac{1}{(x+\frac{\epsilon}{2})(x-\frac{\epsilon}{2})}$$

となり，したがって $x^{((2))} = \left(x+\frac{\epsilon}{2}\right)\left(x-\frac{\epsilon}{2}\right)$ とできる。

$$x^{((-3))} = -\frac{1}{2}\Delta_x x^{((-2))} = \frac{1}{(x+\epsilon)x(x-\epsilon)}$$

から，$x^{((3))} = (x+\epsilon)x(x-\epsilon)$，以下同様にして

$$x^{((2n))} = \left(x+\frac{2n-1}{2}\epsilon\right)\left(x+\frac{2n-3}{2}\epsilon\right)\cdots\left(x+\frac{1}{2}\epsilon\right)$$
$$\cdot\left(x-\frac{1}{2}\epsilon\right)\cdots\left(x-\frac{2n-1}{2}\epsilon\right)$$

$$x^{((2n-1))} = (x+(n-1)\epsilon)(x+(n-2)\epsilon)\cdots(x+\epsilon)x$$
$$\cdot(x-\epsilon)\cdots(x-(n-1)\epsilon)$$

となる。まとめて定義をすれば，

$$\Delta_x x^{((m))} = \begin{cases} \prod_{i=1}^{m}\left(x+\left(\frac{m+1}{2}-i\right)\epsilon\right) & (m>0) \\ 1 & (m=0) \\ \frac{1}{x^{((-m))}} & (m<0) \end{cases}$$

以下でこの階乗べき関数 $x^{((m))}$ についての差分公式 $\Delta_x x^{((m))} = mx^{((m-1))}$ が成り立つことを証明する。
$m = 0$ のときは，明らかに成り立つ。
$m > 0$ とする。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x x^{((m))} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[\prod_{i=1}^{m}\left(x + \left(\frac{m+1}{2} - i\right)\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon\right)\right. \\
&\qquad \left. - \prod_{i=1}^{m}\left(x + \left(\frac{m+1}{2} - i\right)\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon\right)\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[\prod_{i=1}^{m}\left(x + \left(\frac{m+2}{2} - i\right)\epsilon\right) - \prod_{i=1}^{m}\left(x + \left(\frac{m}{2} - i\right)\epsilon\right)\right] \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left[\left(x + \frac{m}{2}\epsilon\right)\prod_{i=2}^{m}\left(x + \left(\frac{m+2}{2} - i\right)\epsilon\right)\right. \\
&\qquad \left. - \left(x - \frac{m}{2}\epsilon\right)\prod_{i=1}^{m-1}\left(x + \left(\frac{m}{2} - i\right)\epsilon\right)\right] \\
&= \frac{m\epsilon}{\epsilon}\prod_{i=1}^{m-1}\left(x + \left(\frac{m}{2} - i\right)\epsilon\right) \\
&= mx^{((m-1))}
\end{aligned}
$$

$m < 0$ のときは，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x \frac{1}{x^{((-m))}} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left\{\left[\prod_{i=1}^{-m}\left(x + \left(\frac{-m+1}{2} - i\right)\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon\right)\right]^{-1}\right. \\
&\qquad \left. - \left[\prod_{i=1}^{-m}\left(x + \left(\frac{-m+1}{2} - i\right)\epsilon - \frac{1}{2}\epsilon\right)\right]^{-1}\right\} \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left\{\left[\prod_{i=1}^{-m}\left(x + \left(\frac{-m+2}{2} - i\right)\epsilon\right)\right]^{-1}\right. \\
&\qquad \left. - \left[\prod_{i=1}^{-m}\left(x + \left(\frac{-m}{2} - i\right)\epsilon\right)\right]^{-1}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\left\{\left(x+\frac{m}{2}\right)-\left(x-\frac{m}{2}\right)\right\}\left[\prod_{i=1}^{-m+1}\left(x+\left(\frac{-m+2}{2}-i\right)\epsilon\right)\right]^{-1}$$

$$= m\left[x^{((-m+1))}\right]^{-1}$$

$$= mx^{((m-1))}$$

となり，この定義が差分公式ならびに対称性を満足していることがわかる。

演習問題 12. 1. $m=1$ のとき，$V_1(x)$ は2次式であるから，$V_1(x) = ax^2+bx+c$ とおく。差分間隔$\epsilon = 1$ として，

$$\Delta_{+x}V_1(x) = \frac{a(x+\epsilon)^2+b(x+\epsilon)+c-(ax^2+bx+c)}{\epsilon}$$
$$= 2ax+(a+b)$$

となるので，これを

$$\Delta_{+x}V_1(x) = x$$

に代入し，

$$2ax+a+b = x$$

なる x についての恒等式から

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases}$$

である。これを解いて，$a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$ であるので，$V_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$ とできる (定数項は任意)。$B_1(x)$ は，

$$B_1(x) = \frac{d}{dx}V_1(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right) = x-\frac{1}{2}$$

と計算される。

さて，$\Delta_{+x}V_1(x) = x$ のとき $\sum_{n=1}^{N} n = V_1(N+1) - V_1(1)$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{N} n = V_1(N+1)-V_1(1)$$

$$= \left\{\frac{(N+1)^2}{2}-\frac{N+1}{2}\right\}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{N(N+1)}{2}$$

と，べき乗の公式が確かめられる。

2. $m=2$ のとき，$V_2(x)$ は 3 次式であるから，$V_2(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。差分間隔 $\epsilon=1$ として，

$$\Delta_{+x}V_2(x)=\frac{1}{\epsilon}a(x+\epsilon)^3+b(x+\epsilon)^2+c(x+\epsilon)+d$$
$$-(ax^3+bx^2+cx+d)$$
$$=3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)$$

となるので，これを

$$\Delta_{+x}V_2(x)=x^2$$

に代入し，

$$3ax^2+(3a+2b)x+(a+b+c)=x^2$$

である x についての恒等式から

$$\begin{cases}3a=1\\3a+2b=0\\a+b+c=0\end{cases}$$

である。これを解いて，$a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{6}$ であるので，$V_2(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}$ とできる (定数項は任意)。$B_2(x)$ は，

$$B_2(x)=\frac{d}{dx}V_2(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}\right)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

と計算される。

さて，$\Delta_{+x}V_2(x)=x^2$ のとき $\sum_{n=1}^{N}n^2=V_2(N+1)-V_2(1)$ であるから，

$$\sum_{n=1}^{N}n^2=V_2(N+1)-V_2(1)$$
$$=\left\{\frac{(N+1)^3}{3}-\frac{(N+1)^2}{2}+\frac{N+1}{6}\right\}-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

と，べき乗の公式が確かめられる。

3. $m=3$ のとき，$V_3(x)$ は 4 次式であるので，$V_3(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおく。差分間隔 $\epsilon=1$ として，

$$\Delta_{+x}V_3(x)=\frac{1}{\epsilon}\left\{a(x+\epsilon)^4+b(x+\epsilon)^3+c(x+\epsilon)^2+d(x+\epsilon)+e\right.$$
$$\left.-(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e)\right\}$$
$$=4ax^3+(6a+3b)x+(4a+3b+2c)+(a+b+c+d)$$

となるので，これを

$$\Delta_{+x}V_3(x)=x^3$$

に代入し，

$$4ax^3+(6a+3b)x+(4a+3b+2c)+(a+b+c+d)=x^3$$

なる x についての恒等式から

$$\begin{cases}4a=1\\6a+3b=0\\4a+3b+2c=0\\a+b+c+d=0\end{cases}$$

である。これを解いて，$a=\frac{1}{4}$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{4}$，$d=0$ であるので，$V_2(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2$ とできる (定数項は任意)。$B_3(x)$ は，

$$B_3(x)=\frac{d}{dx}V_3(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$$

と計算される。

さて，$\Delta_{+x}V_3(x)=x^3$ のとき $\sum_{n=1}^{N}n^3=V_3(N+1)-V_3(1)$ であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}n^3&=V_3(N+1)-V_3(1)\\&=\left\{\frac{(N+1)^4}{4}-\frac{(N+1)^3}{2}+\frac{(N+1)^2}{4}\right\}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\\&=\frac{N^2(N+1)^2}{4}\end{aligned}$$

と，べき乗の公式が確かめられる。

演習問題 13.

$$\begin{aligned}\lim_{q\to1}\delta_{q,x}f(x)&=\lim_{q\to1}\frac{f(x)-f(qx)}{x-qx}\\&=\lim_{\epsilon\to0}\frac{f(x)-f((1+\epsilon)x)}{x-(1+\epsilon)x}\\&=\lim_{\epsilon\to0}\frac{f(x+\epsilon x)-f(x)}{\epsilon x}\\&=\frac{df(x)}{dx}\end{aligned}$$

演習問題 14.

$$[m]_q = \frac{\frac{x^m-(qx)^m}{x-qx}}{x^{m-1}} = \frac{x^m(1-q^m)}{x^{m-1}\cdot x(1-q)} = 1+q+q^2+\cdots+q^{m-1} = \sum_{s=0}^{m-1} q^s$$

$$\lim_{q\to 1}[m]_q = \lim_{q\to 1}\sum_{s=0}^{m-1} q^s = \sum_{s=0}^{m-1} 1 = m$$

D.2 差 分 商

演習問題 1. 次の差分表

x	$f(x)$	$\Delta_{+x}f(x)$	$\Delta_{+x}^2 f(x)$	$\Delta_{+x}^3 f(x)$	$\Delta_{+x}^4 f(x)$
0	1				
		4			
1	5		-3		
		1		1	
2	6		-2		0
		-1		1	
3	5		-1		0
		-2		1	
4	3		0		
		-2			
5	1				

より求める多項式は

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+4x-3\cdot\frac{1}{2!}x(x-1)+1\cdot\frac{1}{3!}x(x-1)(x-2) \\ &= 1+\frac{35}{6}x-2x^2+\frac{1}{6}x^3 \end{aligned}$$

演習問題 2.

$$\begin{aligned} \Delta_{+x} &= \epsilon^{-1}(E_{+x}-1) \\ \Delta_{-x} &= \epsilon^{-1}(1-E_{-x}) \\ \Delta_{x} &= \epsilon^{-1}(E_{+\frac{1}{2}x}-E_{-\frac{1}{2}x}) \end{aligned}$$

であり，$E_{+x}E_{-x}=1$，$E_{+\frac{1}{2}x}E_{-\frac{1}{2}x}=1$ などから，

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \Delta_x\Delta_{-x}f(x) \\ &= \epsilon^{-2}(E_{+x}-1)(1-E_{-x})f(x) \\ &= \epsilon^{-2}(E_{+x}+E_{-x}-2)f(x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \Delta^2 f(x) \\
&= \epsilon^{-2}(E_{+\frac{1}{2}x} - E_{-\frac{1}{2}x})^2 f(x) \\
&= \epsilon^{-2}(E_{+x} - 2 + E_{-x}) f(x)
\end{aligned}
$$

また，もちろん定義式によっても証明を与えることができる。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_{+x}\left(\frac{f(x)-f(x-\epsilon)}{\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left\{\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} - \frac{f(x)-f(x-\epsilon)}{\epsilon}\right\} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\{f(x+\epsilon) - 2f(x) + f(x-\epsilon)\} \\
(\text{右辺}) &= \Delta_x\left(\frac{f(x+\frac{\epsilon}{2})-f(x-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon}\right) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\left\{\frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} - \frac{f(x)-f(x-\epsilon)}{\epsilon}\right\} \\
&= \frac{1}{\epsilon^2}\{f(x+\epsilon) - 2f(x) + f(x-\epsilon)\}
\end{aligned}
$$

演習問題 3.

$$
p_n(x) = c_0 + c_1 x^{\underline{1}} + c_2 x^{\underline{2}} + c_3 x^{\underline{3}} + \cdots + c_n x^{\underline{n}}
$$

に，$x = 0$ を代入して，

$$
p_n(0) = c_0
$$

次に，$p_n(x)$ を x で前進差分すると，

$$
\Delta_{+x} p_n(x) = c_1 + 2c_2 x^{\underline{1}} + 3c_3 x^{\underline{2}} + \cdots + nc_n x^{\underline{n-1}}
$$

となる。これに $x = 0$ を代入すると，

$$
\Delta_{+x} p_n(0) = c_1
$$

となる。さらに差分して，

$$
\Delta_{+x}^2 p_n(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x^{\underline{1}} + \cdots + n(n-1)c_n x^{\underline{n-2}}
$$

となり，$x = 0$ を代入して，

$$
\Delta_{+x}^2 p_n(0) = 2c_2
$$

となる。同様の手順を踏むと，一般に係数 c_k $(0 \leq k \leq n)$ は，

$$
c_k = \frac{1}{k!}\Delta_{+x}^k p_n(0)
$$

となる。これらをすべて問題の p_n の定義式に代入すると，

$$p_n(x) = p_n(0) + x\Delta_{+x}p_n(0) + \frac{1}{2!}x^2\Delta_{+x}^2 p_n(0) + \frac{1}{3!}x^3\Delta_{+x}^3 p_n(0)$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!}x^n\Delta_{+x}^n p_n(0)$$

となり，式が得られる。

演習問題 4. $n = 1$ のとき，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \Delta_{+x}g(x)h(x)\\ &= \frac{1}{\epsilon}\{g(x+\epsilon)h(x+\epsilon) - g(x)h(x)\}\\ (\text{右辺}) &= \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}[\Delta_{+x}^{1-k}g(x)]h(x+(1-k)\epsilon)\\ &= \binom{1}{0}[\Delta_{+x}g(x)]h(x+\epsilon) + \binom{1}{1}g(x)\Delta_{+x}h(x)\\ &= \frac{g(x+\epsilon)-g(x)}{\epsilon}h(x+\epsilon) + g(x)\frac{h(x+\epsilon)-h(x)}{\epsilon}\\ &= \frac{1}{\epsilon}\{g(x+\epsilon)h(x+\epsilon) - g(x)h(x)\}\end{aligned}$$

であるから，成立する。
$n_1 \geq 2$ である自然数 n_1 を考える。$n = n_1 - 1$ のとき，与式が成立するものとすると，

$$\Delta_{+x}^{n_1-1}g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n_1-1}\binom{n_1-1}{k}\left[\Delta_{+x}^{n_1-1-k}g(x)\right]\Delta_{+x}^{k}h(x+(n_1-1-k)\epsilon)$$

である。$n = n_1$ のとき，

$$\Delta_{+x}g(x)h(x) = [\Delta_{+x}g(x)]h(x+\epsilon) + g(x)\Delta_{+x}h(x)$$

$$\binom{n_1-1}{k-1} + \binom{n_1-1}{k} = \binom{n_1}{k}$$

を利用すると，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \Delta_{+x}^{n_1-1}g(x)h(x)\\ &= \Delta_{+x}\left\{\sum_{k=0}^{n_1-1}\binom{n_1-1}{k}\left[\Delta_{+x}^{n_1-1-k}g(x)\right]\Delta_{+x}^{k}h(x+(n_1-1-k)\epsilon)\right\}\\ &= \sum_{k=0}^{n_1-1}\binom{n_1-1}{k}\left\{\left[\Delta_{+x}^{n_1-k}g(x)\right]\Delta_{+x}^{k}h(x+(n_1-k)\epsilon)\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left[\Delta_{+x}^{n_1-1-k} g(x)\right] \Delta_{+x}^{k+1} h(x+(n_1-1-k)\epsilon)\Big\} \\
&= \sum_{k=0}^{n_1-1} \binom{n_1-1}{k} \left[\Delta_{+x}^{n_1-k} g(x)\right] \Delta_{+x}^{k} h(x+(n_1-k)\epsilon) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n_1} \binom{n_1-1}{k-1} \left[\Delta_{+x}^{n_1-k} g(x)\right] \Delta_{+x}^{k} h(x+(n_1-k)\epsilon) \\
&= [\Delta_{+x}^{n_1} g(x)] h(x+n_1\epsilon) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n_1-1} \left\{ \binom{n_1-1}{k} + \binom{n_1-1}{k-1} \right\} \\
&\qquad \cdot \left[\Delta_{+x}^{n_1-k} g(x)\right] \Delta_{+x}^{k} h(x+(n_1-k)\epsilon) \\
&\quad + g(x) \Delta_{+x}^{n_1} h(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \left[\Delta_{+x}^{n_1-k} g(x)\right] \Delta_{+x}^{k} h(x+(n_1-k)\epsilon)
\end{aligned}
$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により任意の自然数 n について与式が成り立つ。

研究課題 1.

$$
M_x f(x) = \frac{f(x+\frac{\epsilon}{2}) + f(x-\frac{\epsilon}{2})}{2}
$$

と定義し，まず Δ_x と M_x の交換性を証明する。

$$
\begin{aligned}
M_x \Delta_x f(x) &= M_x \left\{ \frac{f(x+\frac{\epsilon}{2}) - f(x-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} \right\} \\
&= \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{2\epsilon} + \frac{f(x) - f(x-\epsilon)}{2\epsilon} \\
&= \frac{f(x+\epsilon) - f(x-\epsilon)}{2\epsilon}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_x M_x f(x) &= \Delta_x \left\{ \frac{f(x+\frac{\epsilon}{2}) + f(x-\frac{\epsilon}{2})}{2} \right\} \\
&= \frac{f(x+\epsilon) + f(x)}{2\epsilon} - \frac{f(x) + f(x-\epsilon)}{2\epsilon} \\
&= \frac{f(x+\epsilon) - f(x-\epsilon)}{2\epsilon}
\end{aligned}
$$

よって，$M_x \Delta_x f(x) = \Delta_x M_x f(x)$ が証明された。

さて，中心差分によるライプニッツ則を

$$\Delta_x^n g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\Delta_x^{n-k} M_x^k g(x)] M_x^{n-k} \Delta_x^k h(x)$$

と仮定し，数学的帰納法により証明してみる。
$n=1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x g(x)h(x) \\
&= \frac{g(x+\frac{\epsilon}{2})h(x+\frac{\epsilon}{2}) - g(x-\frac{\epsilon}{2})h(x-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} \\
(\text{右辺}) &= [\Delta_x g(x)] M_x h(x) + [M_x g(x)] \Delta_x h(x) \\
&= \frac{g(x+\frac{\epsilon}{2}) - g(x-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} \frac{h(x+\frac{\epsilon}{2}) + h(x-\frac{\epsilon}{2})}{2} \\
&\quad + \frac{g(x+\frac{\epsilon}{2}) + g(x-\frac{\epsilon}{2})}{2} \frac{h(x+\frac{\epsilon}{2}) - h(x-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon} \\
&= \frac{g(x+\frac{\epsilon}{2})h(x+\frac{\epsilon}{2}) - g(x-\frac{\epsilon}{2})h(x-\frac{\epsilon}{2})}{\epsilon}
\end{aligned}$$

であるから，成立する。
$n_1 \geq 2$ である自然数 n_1 を考える。$n = n_1 - 1$ のとき，与式が成立するものとすると，

$$\Delta_x^{n_1-1} g(x)h(x) = \sum_{k=0}^{n_1-1} \binom{n_1-1}{k} [\Delta_x^{n_1-1-k} M_x^k g(x)] M_x^{n_1-1-k} \Delta_x^k h(x)$$

である。$n = n_1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{n_1} g(x)h(x) \\
&= \Delta_x \left\{ \sum_{k=0}^{n_1-1} \binom{n_1-1}{k} [\Delta_x^{n_1-1-k} M_x^k g(x)] M_x^{n_1-1-k} \Delta_x^k h(x) \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{n_1-1} \binom{n_1-1}{k} [\Delta_x^{n_1-k} M_x^k g(x)] M_x^{n_1-k} \Delta_x^k h(x) \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n_1-1} \binom{n_1-1}{k} [\Delta_k^{n_1-1-k} M_x^{k+1} g(x)] M_x^{n_1-1-k} \Delta_x^{k+1} h(x) \\
&= [\Delta_x^{n_1} g(x)] M_x^{n_1} h(x) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n_1-1} \left\{ \binom{n_1-1}{k} + \binom{n_1-1}{k-1} \right\} \\
&\qquad \cdot [\Delta_x^{n_1-k} M_x^k g(x)] M_x^{n_1-k} \Delta_x^k h(x)
\end{aligned}$$

$$+ [M_x^{n_1} g(x)]\Delta_x^{n_1} h(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} [\Delta_x^{n_1-k} M_x^k g(x)] M_x^{n_1-k} \Delta_x^k h(x)$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により任意の自然数 n について与式が成り立つ。

また，このライプニッツ則の別証を与える。

$$\Delta_x g(x)h(x) = [\Delta_x g(x)] M_x h(x) + [M_x g(x)]\Delta_x h(x)$$
$$= [\Delta_x M_{x'} + M_x \Delta_{x'}] g(x) h(x')|_{x'=x}$$

したがって，

$$\Delta_x^n g(x)h(x) = [\Delta_x M_{x'} + M_x \Delta_{x'}]^n g(x)h(x')|_{x'=x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\Delta_x M_{x'}]^{n-k} [M_x \Delta_{x'}]^k g(x)h(x')|_{x'=x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\Delta_x^{n-k} M_x^k g(x)] M_{x'}^{n-k} \Delta_{x'}^k h(x')|_{x'=x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [\Delta_x^{n-k} M_x^k g(x)] M_x^{n-k} \Delta_x^k h(x)$$

演習問題 5. 本文中で計算済みである。

演習問題 6. $n = 1$ のとき，

$$(\text{左辺}) = \Delta_x^{(1,j+m+1)} f(x_{j+m})$$

$$= \frac{f(x_{j+m}) - f(x_{j+m+1})}{x_{j+m} - x_{j+m+1}}$$

$$= \frac{f(x+(m+1)\epsilon) - f(x+(m+2)\epsilon)}{x+(m+1)\epsilon - x - (m+2)\epsilon}$$

$$= \frac{f(x+(m+2)\epsilon) - f(x+(m+1)\epsilon)}{\epsilon}$$

$$= \Delta_{+x} f(x+(m+1)\epsilon)$$

であるから成立する。

$n_1 \geq 2$ である自然数 n_1 を考える。$n = n_1 - 1$ のとき，与式が成立するものとすると，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m}) = \frac{1}{(n_1-1)!} \Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+(m+1)\epsilon)$$

であり，m を 1 ずらして $m+1$ と置き換えれば，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+2)} f(x_{j+m+1}) = \frac{1}{(n_1-1)!} \Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+(m+2)\epsilon)$$

である。また，式 (2.195) より

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m+n_1}) = \Delta_x^{(n_1-1,j+m+2)} f(x_{j+m+1})$$

であることを利用すれば，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m+n_1}) = \frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+(m+2)\epsilon)$$

である。
さてここで $n=n_1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{(n_1,j+m+1)} f(x_{j+m}) \\
&= \frac{\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m}) - \Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m+n_1})}{x_{j+m}-x_{j+m+n_1}} \\
&= \frac{\frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+(m+2)\epsilon) - \frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+(m+1)\epsilon)}{n_1\epsilon} \\
&= \frac{1}{n_1!}\Delta_{+x}^{n_1} f(x+(m+1)\epsilon)
\end{aligned}$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により任意の自然数 n について与式が成り立つ。

演習問題 7. $n=1$ のとき，$x_j = x+\epsilon$ より，

$$(\text{左辺}) = \Delta_x^{(1,j)} f(x) = \frac{f(x)-f(x_j)}{x-x_j} = \frac{f(x+\epsilon)-f(x)}{\epsilon} = \Delta_{+x} f(x)$$

であるから，成立する。
$n_1 \geq 2$ である自然数 n_1 を考える。$n=n_1-1$ のとき，与式が成立するものとすると，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x) = \frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x)$$

である。さてここで，式 (2.195) より

$$\Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x_{j+n_1-1}) = \Delta_x^{(n_1-1,j+1)} f(x_j)$$

であることと，演習問題 6 より

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+1)} f(x_j) = \frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+\epsilon)$$

であることから，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x_{j+n_1-1}) = \frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+\epsilon)$$

である。
$n = n_1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x) \\
&= \frac{\Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x) - \Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x_{j+n_1-1})}{x - x_{j+n_1-1}} \\
&= \frac{\frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x+\epsilon) - \frac{1}{(n_1-1)!}\Delta_{+x}^{n_1-1} f(x)}{n_1\epsilon} \\
&= \frac{1}{n_1!}\Delta_{+x}^{n_1} f(x)
\end{aligned}
$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により任意の自然数 n について与式が成り立つ。

演習問題 8. $n = 1$ のとき，

$$
(\text{左辺}) = \Delta_x^{(1,j)} f(x) = \frac{f(x) - f(x_j)}{x - x_j} = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} = \delta_{q,x} f(x)
$$

$n = 2$ のとき，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{(2,j)} f(x) \\
&= \frac{\Delta_x^{(1,j)} f(x) - \Delta_x^{(1,j)} f(x_{j+1})}{x - x_{j+1}} \\
&= \frac{1}{x - q^2x}\left(\delta_{q,x} f(x) - \frac{f(q^2x) - f(qx)}{q^2x - qx}\right) \\
&= \frac{1}{(1+q)(x-qx)}\left(\delta_{q,x} f(x) - \frac{f(qx) - f(q^2x)}{qx - q^2x}\right) \\
&= \frac{1}{[2]_q!}\left(\frac{\delta_{q,x} f(x) - \delta_{q,x} f(qx)}{x - qx}\right) \\
&= \frac{1}{[2]_q!}\delta_{q,x}^2 f(x)
\end{aligned}
$$

演習問題 9. $n = 1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{(1,j+m+1)} f(x_{j+m}) \\
&= \frac{f(x_{j+m}) - f(x_{j+m+1})}{x_{j+m} - x_{j+m+1}} \\
&= \frac{f(q^{m+1}x) - f(q^{m+2}x)}{q^{m+1}x - q^{m+2}x}
\end{aligned}
$$

$$= \delta_{q,x} f(q^{m+1}x)$$
$$= \delta_{q,x} f(x_{j+m})$$

で，$[1]_q = 1$ であるから成立する。
$n_1 \geq 2$ である自然数 n_1 を考える。$n = n_1 - 1$ のとき，与式が成立するものとすると，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m}) = \frac{1}{[n_1-1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1-1} f(q^{m+1}x)$$

であり，m を 1 ずらして $m+1$ と置き換えれば，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+2)} f(x_{j+m+1}) = \frac{1}{[n_1-1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1-1} f(q^{m+2}x)$$

である。式 (2.195) より

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m+n_1}) = \Delta_x^{(n_1-1,j+m+2)} f(x_{j+m+1})$$

であることを利用すれば，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m+n_1}) = \frac{1}{[n_1-1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1-1} f(q^{m+2}x)$$

である。
さてここで $n = n_1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{(n_1,j+m+1)} f(x_{j+m}) \\
&= \frac{\Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m}) - \Delta_x^{(n_1-1,j+m+1)} f(x_{j+m+n_1})}{x_{j+m} - x_{j+m+n_1}} \\
&= \frac{\frac{1}{[n_1-1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1-1} f(q^{m+1}x) - \frac{1}{[n_1-1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1-1} f(q^{m+2}x)}{q^{m+1}x - q^{m+n_1+1}x} \\
&= \frac{\frac{1}{[n_1-1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1-1} f(q^{m+1}x) - \frac{1}{[n_1-1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1-1} f(q^{m+2}x)}{[n_1]_q (q^{m+1}x - q^{m+2}x)} \\
&= \frac{1}{[n_1]_q!} \delta_{q,x}^{n_1} f(q^{m+1}x)
\end{aligned}
$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により任意の自然数 n について与式が成り立つ。

演習問題 10. $n = 1$ のとき，

$$(\text{左辺}) = \Delta_x^{(1,j)} f(x) = \frac{f(x) - f(x_j)}{x - x_j} = \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} = \delta_{q,x} f(x)$$

で，$[1]_q = 1$ であるから成立する。

$n_1 \geq 2$ である自然数 n_1 を考える。$n = n_1 - 1$ のとき，与式が成立するものとすると，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x) = \frac{1}{[n_1-1]_q!}\delta_{q,x}^{n_1-1} f(x)$$

である。また式 (2.195), 演習問題 9 より

$$\Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x_{j+n_1-1}) = \Delta_x^{(n_1-1,j+1)} f(x_j) = \frac{1}{[n_1-1]_q!}\delta_{q,x}^{n_1-1} f(qx)$$

である。さてここで $n = n_1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{(n_1,j)} f(x) \\
&= \frac{\Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x) - \Delta_x^{(n_1-1,j)} f(x_{j+n_1-1})}{x - x_{j+n_1-1}} \\
&= \frac{\frac{1}{[n_1-1]_q!}\delta_{q,x}^{n_1-1} f(x) - \frac{1}{[n_1-1]_q!}\delta_{q,x}^{n_1-1} f(qx)}{x - q^{n_1}x} \\
&= \frac{\frac{1}{[n_1-1]_q!}\delta_{q,x}^{n_1-1} f(x) - \frac{1}{[n_1-1]_q!}\delta_{q,x}^{n_1-1} f(qx)}{[n_1]_q(x - qx)} \\
&= \frac{1}{[n_1]_q!}\delta_{q,x}^{n_1} f(x)
\end{aligned}$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により任意の自然数 n について与式が成り立つ。

演習問題 11. 演習問題 10 より，

$$\Delta_x^{(n,j)} g(x)h(x) = \frac{1}{[n]_q!}\delta_{q,x}^{n} g(x)h(x)$$

$$\Delta_x^{(n-k,j)} g(x) = \frac{1}{[n-k]_q!}\delta_{q,x}^{n-k} g(x)$$

また，演習問題 9 より，

$$\Delta_x^{(k,j+n-k)} h(x_{j+n-k-1}) = \frac{1}{[k]_q!}\delta_{q,x}^{k} f(q^{n-k}x)$$

である。これらと式 (2.173) より，

$$\begin{aligned}
\Delta_x^{(n,j)} g(x)h(x) &= \sum_{k=0}^{n} \left[\Delta_x^{(n-k,j)} g(x)\right]\left[\Delta_x^{(k,j+n-k)} h(x_{j+n-k-1})\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{[n-k]_q!}\delta_{q,x}^{n-k} g(x)\right]\left[\frac{1}{[k]_q!}\delta_{q,x}^{k} f(q^{n-k}x)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{[n-k]_q![k]_q!}\delta_{q,x}^{n-k} g(x)\delta_{q,x}^{k} h(q^{n-k}x)
\end{aligned}$$

演習問題 12.

$$\Delta_x^{(2,j)} x^m = \frac{x^m}{(x-x_j)(x-x_{j+1})} + \frac{x_j^m}{(x_j-x)(x_j-x_{j+1})} + \frac{x_{j+1}^m}{(x_{j+1}-x)(x_{j+1}-x_j)}$$

を，$\Delta_x^{(2,j)} x^3$，$\Delta_x^{(2,j)} x^4$ と組み合わせる。

$$\Delta_x^{(1,j)} x^3 = \frac{x^3 - x_j^3}{x - x_j} = x^2 + x x_j + x_j^2$$

$$\begin{aligned}
\Delta_x^{(2,j)} x^3 &= \frac{\Delta_x^{(1,j)} x^3 - \Delta_x^{(1,j)} x^3|_{x=x_j+1}}{x - x_{j+1}} \\
&= \frac{x^2 + x x_j + x_j^2 - (x_{j+1}^2 + x_{j+1} x_j + x_j^2)}{x - x_{j+1}} \\
&= x + x_j + x_{j+1}
\end{aligned}$$

であるので，$m = 3, x = a, x_j = b, x_{j+1} = c$ とすれば，

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c$$

となる。また，

$$\begin{aligned}
\Delta_x^{(1,j)} x^4 &= \frac{x^4 - x_j^4}{x - x_j} \\
&= x^3 + x^2 x_j + x x_j^2 + x_j^3 \\
\Delta_x^{(2,j)} x^4 &= \frac{\Delta_x^{(1,j)} x^4 - \Delta_x^{(1,j)} x^4|_{x=x_j+1}}{x - x_{j+1}} \\
&= \frac{x^3 + x^2 x_j + x x_j^2 + x_j^3 - (x_{j+1}^3 + x_{j+1}^2 x_j + x_{j+1} x_j^2 + x_j^3)}{x - x_{j+1}} \\
&= x^2 + x_j^2 + x_{j+1}^2 + x x_j + x_j x_{j+1} + x x_{j+1}
\end{aligned}$$

であるので，$m = 4, x = a, x_j = b, x_{j+1} = c$ とすれば，

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca$$

演習問題 13.

$$c_0 x^{(0,j)} + c_1 x^{(1,j)} + c_2 x^{(2,j)} + \cdots + c_n x^{(n,j)} = 0$$

に $x=x_j$ を代入すると，$x_j^{(k,j)}=0\ (1 \le k \le n)$ であるから，

$$c_0 = 0$$

となる。次に，$x=x_{j+1}$ を代入すると，$x_{j+1}^{(k,j)}=0\ (2 \le k \le n)$ であるから，

$$c_1(x_{j+1}-x_j) = 0$$

で，x_{j+1}, x_j は相異なるので

$$c_1 = 0$$

以下同様にして $x=x_{j+i}$ を代入すると，$x_{j+i}^{(k,j)}=0\ (i+1 \le k \le n)$ であるから，

$$c_i = 0$$

となり，式 (2.232) が導かれる。

演習問題 14.

$$\begin{aligned}
\Delta_x^{(1,j)} x^{(3,j)} &= \Delta_x^{(1,j)}(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2}) \\
&= \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})-0}{x-x_j} \\
&= (x-x_{j+1})(x-x_{j+2}) \\
&= x^{(2,j+1)} \\
\Delta_x^{(2,j)} x^{(3,j)} &= \Delta_x^{(2,j)}(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2}) \\
&= \frac{\Delta_x^{(1,j)}(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})-0}{x-x_{j+1}} \\
&= \frac{(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})}{x-x_{j+1}} \\
&= x-x_{j+2} \\
&= x^{(1,j+2)} \\
\Delta_x^{(3,j)} x^{(3,j)} &= \Delta_x^{(3,j)}(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2}) \\
&= \frac{\Delta_x^{(2,j)}(x-x_j)(x-x_{j+1})(x-x_{j+2})-0}{x-x_{j+2}} \\
&= \frac{x-x_{j+2}}{x-x_{j+2}} \\
&= 1 \\
&= x^{(0,j+3)}
\end{aligned}$$

次に任意の自然数 $m, n\ (m \ge n)$ について証明する。
$n=1$ のとき，m は任意の自然数として，

$$(\text{左辺}) = \Delta_x^{(1,j)} x^{(m,j)} = \frac{x^{(m,j)} - x_j^{(m,j)}}{x-x_j} = \frac{x^{(m,j)}}{x-x_j} = x^{(m-1,j+1)} = (\text{右辺})$$

で成立する。

$n_1 \geq 2$ である自然数 n_1 を考える。$n = n_1 - 1$ のとき，$m \geq n_1 - 1$ を満たす自然数 m に対して与式が成立するものとすると，

$$\Delta_x^{(n_1-1,j)} x^{(m,j)} = x^{(m-n_1+1,j+n_1-1)}$$

である。$n = n_1$ のとき，

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \Delta_x^{(n_1,j)} x^{(m,j)} \\
&= \frac{\Delta_x^{(n_1-1,j)} x^{(m,j)} - \Delta_x^{(n_1-1,j)} x_j^{(m,j)}}{x - x_{j+n_1-1}} \\
&= \frac{x^{(m-n_1+1,j+n_1-1)}}{x - x_{j+n_1-1}} \\
&= x^{(m-n_1,j+n_1)} \\
&= (\text{右辺})
\end{aligned}$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により任意の自然数 n について与式が成り立つ。

演習問題 15.

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{1}{x_k^{(n,0,\hat{k})}} - \frac{1}{x_k^{(n,1,\hat{k})}} \\
&= \frac{1}{\prod_{s=0,s\neq k}^{n-1} (x_k - x_s)} - \frac{1}{\prod_{s=1,s\neq k}^{n} (x_k - x_s)} \\
&= \frac{(x_k - x_n) - (x_k - x_0)}{\prod_{s=0,s\neq k}^{n} (x_k - x_s)} \\
&= \frac{x_0 - x_n}{x_k^{(n+1,0,\hat{k})}}
\end{aligned}$$

演習問題 16.

$$\begin{aligned}
(\text{第 1 式右辺}) &= x^{(k,0)} x^{(n,k)} \\
&= \left[\prod_{s=0}^{k-1} (x - x_s)\right] \left[\prod_{s=0}^{n-1} (x - x_{k+s})\right] \\
&= \prod_{s=0}^{k+n-1} (x - x_s) \\
&= x^{(k+n,0)} = (\text{第 1 式左辺})
\end{aligned}$$

$$(\text{第 2 式左辺}) = x^{(k+n,0,\hat{k})}$$

$$= \left[\prod_{s=0}^{k-1}(x_k - x_s)\right]\left[\prod_{s=k+1}^{k+n-1}(x_k - x_s)\right]$$

$$= x_k^{(k,0)} x_k^{(n-1,k+1)} = (\text{第 2 式右辺})$$

演習問題 17.

$$1 + \sum_{n=0}^{m}\prod_{s=0}^{n}\frac{(x - x_s)}{(x_0 - x_{s+1})} = \prod_{j=1}^{m+1}\frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

の両辺に $\prod_{j=1}^{m+1}(x_0 - x_j)$ をかけて，

$$\prod_{j=1}^{m+1}(x - x_j) = \prod_{j=1}^{m+1}(x_0 - x_j) + \sum_{n=0}^{m}\left[\prod_{s=0}^{n}\frac{(x - x_s)}{(x_0 - x_{s+1})}\right]\left[\prod_{s=1}^{m+1}(x_0 - x_s)\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{m+1}(x_0 - x_j) + \sum_{n=0}^{m}\left[\prod_{s=0}^{n}(x - x_s)\right]\left[\prod_{s=n+2}^{m+1}(x_0 - x_s)\right]$$

したがって

$$x^{(m+1,1)} = x_0^{(m+1,1)} + \sum_{n=0}^{m} x^{(n+1,0)} x_0^{(m-n,n+2)}$$

$$= x^{(0,0)} x_0^{(m+1,1)} + \sum_{n=1}^{m+1} x^{(n,0)} x_0^{(m-n+1,n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{m+1} x^{(n,0)} x_0^{(m-n+1,n+1)}$$

と変形できる。最後の式において，m を 1 だけ減らせば，

$$x^{(m,1)} = \sum_{n=0}^{m} x^{(n,0)} x_0^{(m-n,n+1)}$$

となる。
さてここで，この式を証明してみよう。$m = 0$ のとき，

$$(\text{右辺}) = x^{(0,1)} = 1$$

$$(\text{左辺}) = x^{(0,0)} x_0^{(0,1)} = 1$$

であるから成立する。

自然数 m_1 を考える。$m=m_1-1$ のとき，与式が成立するものとすると，

$$x^{(m_1,1)}=\sum_{n=0}^{m_1-1}x^{(n,0)}x_0^{(m_1-1-n,n+1)}$$

である。$m=m_1$ のとき，

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=\sum_{n=0}^{m_1}x^{(n,0)}x_0^{(m_1-n,n+1)}\\&=\sum_{n=0}^{m_1-1}x^{(n,0)}x_0^{(m_1-n,n+1)}+x^{(m_1,0)}x_0^{(0,m_1+1)}\\&=(x_0-x_{m_1})\sum_{n=0}^{m_1-1}x^{(n,0)}x_0^{(m_1-n-1,n-1)}+x^{(m_1,0)}\\&=(x_0-x_{m_1})x^{(m_1-1,1)}+x^{(m_1,0)}\\&=(x_0-x_{m_1})x^{(m_1-1,1)}+(x-x_0)x^{(m_1-1,1)}\\&=(x-x_{m_1})x^{(m_1-1,1)}\\&=x^{(m_1,1)}\end{aligned}$$

であるので，与式は成り立つ。したがって，数学的帰納法により 0 以上の整数 m について与式が成り立つ。

D.3 補間法 (点と点の間を推定する)

演習問題 1.

$$(\text{左辺})=p_2(x)=ax^2+bx+c$$

$$(\text{右辺})=p_2(x_j)+x^{(1,j)}\Delta_x^{(1,j)}p_2(x_{j+1})+x^{(2,j)}\Delta_x^{(2,j)}p_2(x_{j+2})$$

ここで，

$$\begin{aligned}&x^{(1,j)}\Delta_x^{(1,j)}p_2(x_{j+1})\\&=x^{(1,j)}\frac{1}{x_{j+1}-x_j}(p_2(x_{j+1})-p_2(x_j))\\&=\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}(x_{j+1}-x_j)\{a(x_{j+1}+x_j)+b\}\\&=(x-x_j)\{a(x_{j+1}+x_j)+b\}\end{aligned}$$

$$x^{(2,j)}\Delta_x^{(2,j)}p_2(x_{j+2})$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{(2,j)} \frac{1}{x_{j+2} - x_{j+1}} \left(\Delta_x^{(1,j)} p(x_{j+2}) - \Delta_x^{(1,j)} p(x_{j+1}) \right) \\
&= \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{x_{j+2} - x_{j+1}} \left(\frac{p_2(x_{j+2}) - p_2(x_j)}{x_{j+2} - x_j} - \frac{p_2(x_{j+1}) - p(x_j)}{x_{j+1} - x_j} \right) \\
&= \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{x_{j+2} - x_{j+1}} \left(a(x_{j+2} + x_j) + b - a(x_{j+1} + x_j) - b \right) \\
&= \frac{(x - x_j)(x - x_{j+1})}{x_{j+2} - x_{j+1}} a(x_{j+2} - x_{j+1}) \\
&= (x - x_j)(x - x_{j+1})a
\end{aligned}
$$

であるから，与式の右辺は

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= p_2(x_j) + (x - x_j)\{a(x_{j+1} + x_j) + b\} + (x - x_j)(x - x_{j+1})a \\
&= ax^2 + bx + c
\end{aligned}
$$

となり，恒等式であることが確かめられた。

D.4 ライプニッツ則の応用

演習問題 1.

$$
\begin{aligned}
\delta_{q,x} x f(x) - qx \delta_{q,x} f(x) &= \frac{xf(x) - qxf(qx)}{x - qx} - qx \frac{f(x) - f(qx)}{x - qx} \\
&= \frac{(x - qx)f(x)}{x - qx} \\
&= f(x)
\end{aligned}
$$

演習問題 2.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^n}{\partial x^n} x f(x) - x \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x) \\
&= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k}}{\partial x^{n-k}} x \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x) - x \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x) \\
&= n! \cdot 1 \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} f(x) \\
&= n \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} f(x)
\end{aligned}
$$

演習問題 3. $x > 1$ であるから，

$$
f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} 2x = x(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} > 0
$$

$$f^{(2)}(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} + x(-\frac{1}{2})(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}2x$$

$$= (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} - x^2(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} < 0$$

となる。ここで，$f^{(2)}(x) = g(x)h(x)$ とし，$g(x) = -(x+1)^{-\frac{3}{2}}, h(x) = (x-1)^{-\frac{3}{2}}$ とおくと，

$$g^{(k)}(x) = (-1)^{k+1}\left\{\prod_{i=1}^{k}\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\right\}(x+1)^{-\frac{3}{2}-k}$$

$$h^{(k)}(x) = (-1)^{k}\left\{\prod_{i=1}^{k}\left(i-\tfrac{1}{2}\right)\right\}(x-1)^{-\frac{3}{2}-k}$$

である。$F(x) = f^{(2)}(x) = g(x)h(x)$ とすれば，ライプニッツ則より，

$$F^{(n)}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}g(x)\frac{d^k}{dx^k}h(x)\right\}$$

$$= (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left\{\prod_{i=1}^{n-k}\left(i+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{k}\left(i+\tfrac{1}{2}\right)(x+1)^{-\frac{3}{2}-n+k}(x-1)^{-\frac{3}{2}-k}\right\}$$

である。ゆえに，

$$f^{(n)}(x)$$

$$= F^{(n-2)}(x)$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\left\{\prod_{i=1}^{n-2-k}\left(i+\frac{1}{2}\right)\prod_{i=1}^{k}\left(i+\tfrac{1}{2}\right)(x+1)^{\frac{1}{2}-n+k}(x-1)^{-\frac{3}{2}-k}\right\}$$

となり，$x > 1$ より，$f^{(n)}(x)$ の符号は，$(-1)^{n-1}$ によってのみ決定されるので，

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \text{正} & \cdots n \text{ が奇数のとき} \\ \text{負} & \cdots n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

が成立する。

演習問題 4. 式 (4.47) より，$\epsilon = 1$ とすれば，

$$x^3 = \sum_{r=1}^{3}\left\{\begin{matrix}3\\r\end{matrix}\right\}x^{\underline{r}}$$

である。これと式 (4.69)

$$\sum_{x=1}^{N} x^{\underline{r}} = \tfrac{1}{r+1}[(N+1)^{\underline{r+1}} - 1^{\underline{r+1}}]$$

を利用すると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n^3 &= \sum_{n=1}^{N} \left\{ {3 \atop 1} \right\} n^{\underline{1}} + \sum_{n=1}^{N} \left\{ {3 \atop 2} \right\} n^{\underline{2}} + \sum_{n=1}^{N} \left\{ {3 \atop 3} \right\} n^{\underline{3}} \\ &= \left\{ {3 \atop 1} \right\} \frac{1}{2} \left[(N+1)^{\underline{2}} - 1^{\underline{2}} \right] + \left\{ {3 \atop 2} \right\} \frac{1}{3} \left[(N+1)^{\underline{3}} - 1^{\underline{3}} \right] \\ &\qquad + \left\{ {3 \atop 3} \right\} \frac{1}{4} \left[(N+1)^{\underline{4}} - 1^{\underline{4}} \right] \\ &= \frac{1}{2}(N+1)N + (N+1)N(N-1) + \frac{1}{4}(N+1)N(N-1)(N-2) \\ &= \frac{N^2(N+1)^2}{4}\end{aligned}$$

演習問題 5. 1.

$$\left[{n \atop n} \right] = (n-1) \left[{n-1 \atop n} \right] + \left[{n-1 \atop n-1} \right] = \left[{n-1 \atop n-1} \right] = \cdots = \left[{1 \atop 1} \right] = 1$$

2.

$$\begin{aligned}\left[{n \atop 1} \right] &= (n-1) \left[{n-1 \atop 1} \right] + \left[{n-1 \atop 0} \right] = (n-1) \left[{n-1 \atop 1} \right] = \cdots = (n-1)! \left[{1 \atop 1} \right] \\ &= (n-1)!\end{aligned}$$

$\left[{n \atop n} \right]$, $\left[{n \atop 1} \right]$ は定義式 (4.28) から導き出すのも容易である。

3.

$$\left\{ {n \atop n} \right\} = n \left\{ {n-1 \atop n} \right\} + \left\{ {n-1 \atop n-1} \right\} = \left\{ {n-1 \atop n-1} \right\} = \cdots = \left\{ {1 \atop 1} \right\} = 1$$

$$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1 \left\{ {n-1 \atop 1} \right\} + \left\{ {n-1 \atop 0} \right\} = \left\{ {n-1 \atop 1} \right\} = \cdots = \left\{ {1 \atop 1} \right\} = 1$$

4.

$$\left\{ {n \atop 2} \right\} = 2 \left\{ {n-1 \atop 2} \right\} + \left\{ {n-1 \atop 1} \right\} = 2 \left\{ {n-1 \atop 2} \right\} + 1$$

ここで，$\left\{ {n \atop 2} \right\} = a_n$ とおけば，

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

$$a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1) = 2^{n-2}(a_2 + 1) = 2^{n-1}$$

よって，

$$a_n = \left\{ {n \atop 2} \right\} = 2^{n-1} - 1 \quad (n \geq 2)$$

演習問題 6. 任意の自然数 n について，

$$f(n) = \sum_k \left[{n \atop k} \right] (-1)^k g(k)$$

が成り立つものとする。

$$\begin{aligned} \sum_k \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^k f(k) &= \sum_r \left\{ {n \atop r} \right\} (-1)^r f(r) \\ &= \sum_r \left\{ {n \atop r} \right\} (-1)^r \sum_k \left[{r \atop k} \right] (-1)^k g(k) \\ &= \sum_r \left\{ {n \atop r} \right\} (-1)^r \sum_k \left[{r \atop k} \right] (-1)^{-k} g(k) \\ &= \sum_{r,k} \left\{ {n \atop r} \right\} \left[{r \atop k} \right] (-1)^{r-k} g(k) \\ &= g(n) \quad ((4.76) \text{ 式より}) \end{aligned}$$

また，この逆を証明するには，

$$x^{\overline{n}} = \sum_r \left[{n \atop r} \right] \epsilon^{n-r} x^r$$

と

$$x^n = \sum_r \left\{ {n \atop r} \right\} (-1)^{n-r} \epsilon^{n-r} x^{\overline{r}}$$

より，

$$x^{\overline{n}} = \sum_{r,k} \left[{n \atop r} \right] \left\{ {r \atop k} \right\} (-1)^{r-k} \epsilon^{n-k} x^{\overline{r}}$$

であるから，

$$\sum_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{r-k} = \begin{cases} 0 & \text{整数 } n,k \geq 0\ ,\ n \neq k \\ 1 & \text{整数 } n,k \geq 0\ ,\ n = k \end{cases}$$

を得ておいて，同様に証明する。
任意の自然数 n について，

$$g(n) = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (-1)^k f(k)$$

が成り立つものとする。

$$\begin{aligned}
\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^k g(k) &= \sum_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} (-1)^r g(r) \\
&= \sum_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} (-1)^r \sum_k \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} (-1)^k f(k) \\
&= \sum_r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} (-1)^r \sum_k \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{-k} f(k) \\
&= \sum_{r,k} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} (-1)^{r-k} f(k) \\
&= f(n)
\end{aligned}$$

であるので，与式は成立する。

演習問題 7. 補式として

$$\sum_{m=0}^{n} \left[{n+1 \atop m+1}\right] x^{m+1} = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \left[{n \atop k}\right] \binom{k}{m} x^{m+1}$$

を証明する。

$$(\text{左辺}) = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} x^{m+1} = \sum_{m=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ m \end{bmatrix} x^m = x^{\overline{n+1}}$$

$k < m$ のとき $\dbinom{k}{m} = 0$ より，

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} x^{m+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m} x^{m+1}
\end{aligned}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}x^m\right\}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}(1+x)^k\right\}$$

$$= x(1+x)^{\overline{n}}$$

$$= x^{\overline{n+1}}$$

ゆえに，補式が成り立つ。これは x についての恒等式であるから，係数を比較して

$$\begin{bmatrix}n+1\\m+1\end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}\binom{k}{m}$$

が成立する。
他方の式も同様に，補式

$$\sum_{m=0}^{n}\left\{\begin{matrix}n+1\\m+1\end{matrix}\right\}x^{m+1} = \sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left\{\begin{matrix}k\\m\end{matrix}\right\}x^{m+1}$$

を証明すればよい。

D.5 差分方程式

演習問題 1. 1. 集合 $[n]$ の部分集合を，要素 n を含むものと含まないものとに分けて考える。含まないものの個数は x_n個で，n を含むものと同数。ゆえに

$$x_n = 2x_{n-1} \qquad (n > 1)$$

参考: 初期値は $x_1 = 2$ で,

$$x_n = 2^n$$

2. 題意の集合を $A([n])$ とする。集合 $A([n])$ 中に，要素 n を含まないものは $A([n-1])$ と同一で x_{n-1}個存在する。要素 n を含むものは，$A([n-2])$ の各要素に要素 n を各々加えたものであり，x_{n-2}個存在する。ゆえに

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \qquad (n > 2)$$

参考: 初期値は $x_1 = 2, x_2 = 3$ で,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

3. 題意より

$$x_{n+1} = \frac{97}{100}x_n + \frac{1}{20}y_n, \quad y_{n+1} = \frac{3}{100}x_n + \frac{19}{20}y_n$$

4. $1 \leq k \leq 4$ のとき $x_k = 1$, $5 \leq k \leq 9$ のとき $x_k = 2$, $10 \leq k \leq 14$ のとき $x_k = 4$ であるから,

$$x_n = x_{n-10} + x_{n-5} + 1$$

と考えられるが，これは $x_{15} = 6$ に合わないので，関係式が間違っているといえる。

5. n 人の並び替えのない状態で，一端の人を A, その隣の人を B とする。並び替えにより A が動かない場合は x_{n-1} 通り。A が動く場合は A と B との位置が入れ替わり，さらに $(n-2)$ 人が題意のように動くので x_{n-2} 通り。ゆえに

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

参考: 初期値は $x_1 = 1, x_2 = 2$ で,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$$

6. $(n+1)$ 桁の数を作るときを考える。x_{n+1}の要素は，x_nの各要素の最後の桁に 2 あるいは 3 を付け加えたものと，y_n の各要素の最後の桁に 1 を付け加えたものになる。y_{n+1}についても同様に考えられ，関係式は

$$x_{n+1} = 2x_n + y_n, \quad y_{n+1} = x_n + 2y_n$$

となる。
参考: 初期値は $x_1 = 1, y_1 = 2$ で,

$$x_{n+1} - y_{n+1} = x_n - y_n$$

より，$x_n - y_n = 1$ である。また,

$$x_{n+1} + y_{n+1} = 3(x_n + y_n)$$

より，$x_n + y_n = 3^n$ である。以上の 2 式から,

$$x_n = \frac{3^n + 1}{2}, \quad y_n = \frac{3^n - 1}{2}$$

演習問題 2. 1. 関係式

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

を利用する。
$n = 2m\ (m \geq 1)$ のとき

$$x_{n+1} = \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{2m+1-k}{k}$$

$$x_n + x_{n-1} = \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{2m-k}{k} + \sum_{0 \leq k \leq m-1} \binom{2m-1-k}{k}$$

$$= \binom{2m}{0} + \sum_{0\le k\le m-1}\binom{2m-1-k}{k+1} + \sum_{0\le k\le m-1}\binom{2m-1-k}{k}$$

$$= \binom{2m+1}{0} + \sum_{0\le k\le m-1}\binom{2m-k}{k+1}$$

$$= \sum_{0\le k\le m}\binom{2m+1-k}{k}$$

$n = 2m-1$ $(m \ge 1)$ のとき

$$x_{n+1} = \sum_{0\le k\le m}\binom{2m-k}{k}$$

$$x_n + x_{n-1} = \sum_{0\le k\le m-1}\binom{2m-1-k}{k} + \sum_{0\le k\le m-1}\binom{2m-2-k}{k}$$

$$= \binom{2m-1}{0} + \sum_{0\le k\le m-2}\binom{2m-2-k}{k+1} + \sum_{0\le k\le m-2}\binom{2m-2-k}{k} + \binom{m-1}{m-1}$$

$$= \binom{2m-1}{0} + \sum_{0\le k\le m-2}\binom{2m-1-k}{k+1} + \binom{m-1}{m-1}$$

$$= \sum_{0\le k\le m-1}\binom{2m-k}{k} + \binom{m}{m}$$

$$= \sum_{0\le k\le m}\binom{2m-k}{k}$$

2. (a) • $q \ne 1$ のとき

$$y_n = \frac{q(1-q^N)}{1-q}$$

• $q = 1$ のとき

$$y_n = N$$

(b) • $q \ne 1$ のとき

$$qy_n = \sum_{k=1}^{N} kq^{k+1}$$

より,

$$y_n - qy_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^N - Nq^{N+1}$$

$$= \frac{q(1-q^N)}{1-q} - Nq^{N+1}$$

$$y_n = \frac{q(1-q^N)}{(1-q)^2} - \frac{Nq^{N+1}}{1-q}$$

(別解)

$$y_n = \sum_{k=1}^{N} kq^k$$

$$= \sum_{k=1}^{N} q\frac{dq^k}{dq}$$

$$= q\frac{d}{dq}\left[\sum_{k=1}^{N} q^k\right]$$

$$= q\frac{d}{dq}\left[\frac{q(1-q^N)}{1-q}\right]$$

$$= \frac{q(1-q^N)}{(1-q)^2} - \frac{Nq^{N+1}}{1-q}$$

- $q = 1$ のとき

$$y_n = \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

演習問題 3.　1.

$$y_n = \frac{(n+1)^2}{n} y_{n-1}$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)^2}{k} y_1$$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)^2}{k}$$

$$= \frac{n+1}{4}(n+1)! \cdot y_1$$

$$y_n = \frac{n+1}{4}(n+1)! \qquad (n \geq 1)$$

2.

$$y_n = y_{n-1} + nq^n = y_0 + \sum_{k=1}^{n} kq^k = \sum_{k=1}^{n} kq^k$$

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{q(1-q^n)}{(1-q)^2} - \dfrac{nq^{n+1}}{1-q} & (q \neq 1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{n(n+1)}{2} & (q = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \qquad (n \geq 0)$$

3.

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + a_{n+2} - a_n \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_{k+2} - a_k) \\ &= a_{n+2} + a_{n+1} - a_2 - a_1 \\ y_n &= a_{n+2} + a_{n+1} \qquad (n \geq 0) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1} + (b_{n+3} - b_n)\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right) \\ &= y_0 + \sum_{k=1}^{n}\left\{(b_{k+3} - b_k)\sin\left(\tfrac{2\pi}{3}k\right)\right\} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}b_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}b_2 + 0 \cdot b_3 + \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)b_{n+1} \\ &\qquad + \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+2)\right)b_{n+2} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+3)\right)b_{n+3} \\ y_n &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+1)\right)b_{n+1} + \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+2)\right)b_{n+2} \\ &\qquad + \sin\left(\frac{2\pi}{3}(n+3)\right)b_{n+3} \qquad (n \geq 0) \end{aligned}$$

5.

$$z_{n+1} = az_n$$

より,

$$z_n = A \cdot a^{n-1}$$

定数変化法により $y_n = x_n a^{n-1}$ とし，式に代入する。

$$\begin{aligned} x_{n+1}a^n &= ax_n a^{n-1} + b = x_n a^n + b \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{b}{a^n} \\ x_n &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b}{a^k} + x_0 \end{aligned}$$

$$x_n = \begin{cases} b\dfrac{a^n - 1}{a - 1} + a & (a \neq 1 \text{ のとき}) \\ bn + 1 & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} ba^{n-1}\dfrac{a^n - 1}{a - 1} + a & (a \neq 1 \text{ のとき}) \\ bn + 1 & (a = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

6.

$$z_{n+1} = 2z_n$$

より，

$$z_n = A \cdot 2^{n-1}$$

定数変化法により $y_n = a_n 2^{n-1}$ とし，式に代入する。

$$a_{n+1}2^n - 2a_n 2^{n-1} = 2^n$$
$$a_{n+1} - a_n = 1$$
$$a_n = a_0 + n$$
$$= n + 2$$
$$y_n = (n+2)2^{n-1} \qquad (n \geq 0)$$

7.

$$z_n = -2z_{n-1}$$

より，

$$z_n = A \cdot (-2)^{n-1}$$

定数変化法により $y_n = a_n(-2)^{n-1}$ とし，式に代入する。

$$a_n(-2)^{n-1} = -2a_{n-1}(-2)^{n-2} + n$$
$$a_n = a_{n-1} + \frac{n}{(-2)^{n-1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(-2)^{k-1}} + a_0$$
$$= \frac{3n+2}{9} - \frac{2}{9}(-2)^n$$
$$y_n = \frac{3n+2}{9}(-2)^{n-1} + \frac{1}{9}4^{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

8.

$$z_{n+1} = nz_n$$

より，

$$z_n = A \cdot (n-1)!$$

定数変化法により $y_n = a_n \cdot (n-1)!$ とし，式に代入する。

$$a_{n+1} \cdot n! - na_n \cdot (n-1)! = (n+1)!$$

$$a_{n+1} - a_n = n+1$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) + a_1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

$$y_n = \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right)(n-1)! \qquad (n \geq 1)$$

演習問題 4.

$$(n+1)(y_{n+2} - y_{n+1}) = n(y_{n+1} - y_n)$$

より，$z_n = n(y_{n+1} - y_n)$ とおく。

$$z_{n+1} = z_n$$

$$z_n = 1 \cdot (y_2 - y_1) = c_0$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{c_0}{n}$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_0}{k} + y_1$$

$$y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_0}{k} + c_1$$

演習問題 5.　1. 特性方程式

$$p^2 - 5p + 6 = 0$$

を解いて $p = 2, 3$ であるから，一般解 y_n は

$$y_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

と表される。初期条件 $y_0 = 1, y_1 = 1$ より

$$c_1 + c_2 = 1$$

$$2c_1 + 3c_2 = 1$$

が得られ，これを解いて $c_1 = 2, c_2 = -1$。

$$y_n = 2^{n+1} - 3^n \qquad (n \geq 0)$$

2. 特性方程式

$$p^2 - 2p + 1 = 0$$

を解いて $p=1$ であるから，定数変化法により一般解 y_n を

$$y_n = c_n 1^n = c_n$$

と表す。

$$c_n = 2c_{n-1} - c_{n-2}$$

より

$$c_n = an + b \quad (a, b : \text{Const.})$$
$$y_n = an + b$$

と表される。初期条件 $y_1 = 2, y_2 = 3$ より

$$a + b = 2$$
$$2a + b = 3$$

が得られ，これを解いて $a = 1, b = 1$。

$$y_n = n + 1 \qquad (n \geq 0)$$

3. $\lambda = 2\cos\theta$ とおく。特性方程式

$$p^2 - 2\cos\theta + 1 = 0$$

を解いて $p = \exp^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ であるから，解の重ね合わせにより一般解は

$$y_n = a\cos(\theta n) + b\sin(\theta n)$$

と表される。初期条件 $y_0 = 2, y_1 = \lambda$ より

$$a = 2$$
$$a\cos\theta + b\sin\theta = 2\cos\theta$$

が得られ，これを解いて $a = 2, b = 0$。

$$y_n = 2\cos(\theta n) \qquad (n \geq 0, ただし\lambda = 2\cos\theta)$$

4. 前問同様に一般解は

$$y_n = a\cos(\theta n) + b\sin(\theta n)$$

と表される。初期条件 $y_0 = 1, y_1 = \lambda$ より

$$a = 1$$
$$a\cos\theta + b\sin\theta = 2\cos\theta$$

が得られ，これを解いて $a = 1, b = \tan^{-1}\theta$。

$$y_n = \cos(\theta n) + \tan^{-1}\theta\sin(\theta n) \qquad (n \geq 0, ただし\lambda = 2\cos\theta)$$

演習問題 6. 第1式より

$$y_{n+1} = x_{n+2} - 2x_{n+1}$$

であるから，

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = x_n + 2(x_{n+1} - 2x_n)$$

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$$

特性方程式

$$p^2 - 4p + 3 = 0$$

を解いて $p = 1, 3$ であるから，一般解は

$$x_n = c_1 + c_2 3^n$$

と表される。初期条件 $x_1 = 1, x_2 = 2x_1 + y_1 = 4$ より

$$c_1 + 3c_2 = 1$$

$$c_1 + 9c_2 = 4$$

が得られ，これを解いて $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{1}{2}$。ゆえに

$$x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n$$

で，

$$\begin{aligned} y_n &= x_{n+1} - 2x_n \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^{n+1} - 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_n &= \dfrac{3^n - 1}{2} \\ y_n &= \dfrac{3^n + 1}{2} \end{cases} \qquad (n \geq 1)$$

演習問題 7. 1. 代入法で解く。まず特解を $y = an$ と仮定し，与式に代入する。

$$a(n+2) - 4a(n+1) + 3an = 2$$

$$a = -1$$

よって特解は $y_n = -n$。また，斉次方程式

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$$

の一般解は，$x_n = c_1 + c_2 3^n$ であるから，これを重ねて，y_n の一般解は $y_n = -n + c_1 + c_2 3^n$ と表される。初期条件から

$$y_0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$y_1 = -1 + c_1 + 3c_2 = 4$$

であるから $c_1 = -\frac{5}{2}, c_2 = \frac{5}{2}$ となる。

$$y_n = -n + \frac{5}{2}(3^n - 1) \qquad (n \geq 0)$$

【別解】 定数変化法で解く。特性方程式

$$\beta^2 - 4\beta + 3 = 0$$

を解いて $\beta = 1, 3$ であるから，$y_n = c_n^{(1)} 1^n + c_n^{(2)} 3^n$ とおく。カソラティ行列

$$C(1^{n+1}, 3^{n+1}) = 2 \cdot 3^{n+1}$$

より，

$$c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)} = -\frac{2 \cdot 3^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1}} = -1$$

$$c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)} = \frac{2 \cdot 1^{n+1}}{2 \cdot 3^{n+1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$$

よって

$$c_n^{(1)} = -n - 1$$

$$c_n^{(2)} = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

と計算でき，特解

$$y_n = c_n^{(1)} 1^n + c_n^{(2)} 3^n = -n + \frac{3}{2}(3^n - 1)$$

を得る。斉次方程式の解を重ね合わせて，一般解は

$$y_n = c_1 + c_2 3^n - n + \frac{3}{2}(3^n - 1)$$

と表される。初期条件から

$$y_0 = c_1 + c_2 = 0$$

$$y_1 = c_1 + 3c - 2 - 1 + 3 = 4$$

であるから $c_1 = -1, c_2 = 1$ となる。

$$y_n = -n + \frac{5}{2}(3^n - 1) \qquad (n \geq 0)$$

2. 統一性をはかって

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 5^{n+2}$$

としておく。

代入法で解く。まず特解を $y_n = a \cdot 5^n$ と仮定し，与式に代入する。

$$25a \cdot 5^n - 25a \cdot 5^n + 6a \cdot 5^n = 25 \cdot 5^n$$

$$a = \frac{25}{6}$$

よって特解は $y_n = \frac{1}{6}5^{n+2}$。また，斉次方程式

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$$

の一般解は $x_n = c_1 2^n + c_2 3^n$ であるから，これを重ねて，y_n の一般解は $y_n = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{1}{6}5^{n+2}$ と表される。初期条件から

$$y_0 = c_1 + c_2 + \frac{25}{6} = 0$$

$$y_1 = 2c_1 + 3c_2 + \frac{125}{6} = 1$$

であるから，$c_1 = \frac{22}{3}, c_2 = -\frac{23}{2}$ となる。

$$y_n = \frac{22}{3}2^n - \frac{23}{2}3^n + \frac{1}{6}5^{n+2} \qquad (n \geq 0)$$

【別解】 定数変化法で解く。特性方程式

$$\beta^2 - 5\beta + 6 = 0$$

を解いて $\beta = 2, 3$ であるから，$y_n = c_n^{(1)}2^n + c_n^{(2)}3^n$ とおく。カソラティ行列

$$C(2^{n+1}, 3^{n+1}) = 6^{n+1}$$

より，

$$c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)} = -\frac{5^{n+2}3^{n+1}}{6^{n+1}} = -5\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}$$

$$c_{n+1}^{(2)} - c_n^{(2)} = \frac{5^{n+2}2^{n+1}}{6^{n+1}} = 5\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}$$

よって

$$c_n^{(1)} = \left(-\frac{10}{3}\right)\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1} - 1\right)$$

$$c_n^{(2)} = \frac{15}{2}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$

と計算でき，特解

$$y_n = 2^n\left(-\frac{10}{3}\right)\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}-1\right)+3^n\frac{15}{2}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}-1\right)$$
$$=\frac{25}{6}5^n+\frac{10}{3}2^n-\frac{15}{2}3^n$$

を得る。斉次方程式の解を重ね合わせて，一般解は

$$y_n = c_1 2^n + c_2 3^n + \frac{25}{6}5^n + \frac{10}{3}2^n - \frac{15}{2}3^n$$

と表される。初期条件から

$$y_0 = c_1 + c_2 = 0$$
$$y_1 = 2c_1 + 3c_2 + 5 = 1$$

であるから，$c_1 = 4, c_2 = -4$ となる。

$$y_n = \frac{22}{3}2^n - \frac{23}{2}3^n + \frac{1}{6}5^{n+2}$$

3. 統一性をはかって

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 2^{n+2}$$

としておく。
代入法で解く。特解を $y_n = a \cdot 2^n$ と仮定し，与式に代入する。

$$a2^{n+2} + 2a \cdot s^{n+1} + a2^n = 2^{n=2}$$
$$a = \frac{1}{9}2^{n+2}$$

よって特解は $y_n = \frac{1}{9}2^{n+2}$。

4. 統一性をはかって

$$2y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n = n + 2$$

としておく。
代入法で解く。まず特解を $y_n = an^2 + bn$ と仮定し，与式に代入する。

$$2a(n+2)^2 + 2b(n+2) - 3a(n+1)^2 - 3b(n+1) + an^2 + bn = n + 2$$
$$(2a-1)n + 5a + b - 2 = 0$$

よって

$$2a - 1 = 0$$
$$5a + b - 2 = 0$$

であるから，$a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ であり，特解は $y_n=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$。また，斉次方程式

$$2x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n=0$$

の一般解は $x_n=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2$ であるから，これを重ねて，y_n の一般解は $y_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_2+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}$ と表される。初期条件から

$$y_{-2}=4c_1+c_2+2+1=0$$

$$y_{-1}=2c_1+c_2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$$

であるから $c_1=-1, c_2=1$。

$$y_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1 \qquad (n\geq -2)$$

【別解】 定数変化法で解く。特性方程式

$$2\beta^2-3\beta+1=0$$

を解いて $\beta=\frac{1}{2}, 1$ であるから，$2y_n=c_n^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)^n+c_n^{(2)}$ とおく。カソラティ行列

$$C\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, 1^{n+1}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

より，

$$c_{n+1}^{(1)}-c_n^{(1)}=-\frac{(n+2)\cdot 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}=-2^{n+2}(n+2)$$

$$c_{n+1}^{(2)}-c_n^{(2)}=\frac{(n+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}=2(n+2)$$

よって

$$c_n^{(1)}=-n\cdot 2^{n+2}-2$$
$$c_n^{(2)}=n^2+3n+2$$

と計算でき，特解

$$y_n=\frac{1}{2}\left(-n\cdot 2^{n+2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+n^2+3n+2\right)$$

$$=\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

を得る。斉次方程式の解を重ね合わせて，一般解は

$$y_n = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

と表される。初期条件から

$$y_{-2} = 4c_1 + c_2 + 2 + 1 + 1 - 4 = 0$$

$$y_{-1} = 2c_1 + c_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 - 2 = 0$$

であるから，$c_1 = 0, c_2 = 0$ となる。

$$y_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 \qquad (n \geq -2)$$

演習問題 8.　**a** $\theta = \frac{2\pi}{3}$ として

$$y_{n+2} - 2\cos\theta y_{n+1} + y_n = -\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n}$$

とかける。斉次方程式

$$x_{n+2} - 2\cos\theta x_{n+1} + x_n = 0$$

の解 $\{\cos(\theta n), \sin(\theta n)\}$ を使って特解を

$$y_n = c_n^{(1)}\cos(\theta n) + c_n^{(2)}\sin(\theta n)$$

と仮定する。カソラティ行列

$$C(\cos(\theta(n+1)), \sin(\theta(n+1))) = \sin\theta$$

より，

$$c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)} = -\frac{-\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n}}{\sin\theta}\sin(\theta(n+1))$$

$$c_{n+1}^{(1)} - c_n^{(1)} = \frac{-\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n}}{\sin\theta}\cos(\theta(n+1))$$

$\cos(\theta n) = \cos(\theta(n+3))$ に着目すれば，

$$c_n^{(1)} = -\frac{1}{\sin\theta}\left(-\frac{1}{n}\sin(\theta(n+1)) - \frac{1}{n+1}\sin(\theta(n+2)) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n+2}\sin(\theta(n+3))\right)$$

$$c_n^{(2)} = \frac{1}{\sin\theta}\left(-\frac{1}{n}\cos(\theta(n+1)) - \frac{1}{n+1}\cos(\theta(n+2)) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n+2}\cos(\theta(n+3))\right)$$

と計算できるので，特解

$$
\begin{aligned}
y_n &= c_n^{(1)}\cos(\theta n) + c_n^{(2)}\sin(\theta n) \\
&= -\frac{1}{\sin\theta}\left(-\frac{1}{n}\sin\theta - \frac{1}{n+1}\sin 2\theta - \frac{1}{n+2}\sin 3\theta\right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{2\cos\theta}{n+1} + \frac{3-4\sin^2\theta}{n+2} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

を得る。斉次方程式の解を重ねて，一般解を

$$
y_n = \frac{1}{n(n+1)} + c_1\cos(\theta n) + c_2\sin(\theta n)
$$

とおく。初期条件から

$$
y_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = \frac{1}{2}
$$

$$
y_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = \frac{1}{6}
$$

であるから，これを解いて $c_1 = 0, c_2 = 0$。

$$
y_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad (n \geq 1)
$$

b 同様に一般解を

$$
y_n = \frac{1}{n(n+1)} + c_1\cos(\theta n) + c_2\sin(\theta n)
$$

とおく。初期条件から

$$
y_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 0
$$

$$
y_2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1
$$

であるから，これを解いて $c_1 = -\frac{1}{3}, c_2 = -\frac{4\sqrt{3}}{9}$。

$$
y_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{3}\cos(\theta n) - \frac{4\sqrt{3}}{9}\sin(\theta n) \quad \left(n \geq 1, \text{ただし}\theta = \frac{2\pi}{3}\right)
$$

演習問題 9. $y_n = z_n \cos\theta n$ とおき，与式に代入する。

$$z_{n+1}\cos(\theta n+\theta) - 2\cos\theta\cdot z_n\cos\theta + z_{n-1}\cos(\theta n-\theta) = 0$$

また，$y_n = \cos\theta n$ の満たす式より

$$z_n(\cos(\theta n+\theta) - 2\cos\theta\cdot\cos\theta n + \cos(\theta n-\theta)) = 0$$

辺々引算して

$$(z_{n+1}-z_n)\cos(\theta n+\theta) - (z_n - z_{n-1})\cos(\theta n-\theta) = 0$$

$f_n = z_{n+1} - z_n$ とおく。

$$f_n = \frac{\cos(\theta n-\theta)}{\cos(\theta n+\theta)} f_{n-1}$$

$$\begin{aligned} f_n &= f_0 \prod_{k=1}^{n} \frac{\cos(\theta k-\theta)}{\cos(\theta k+\theta)} f_{n-1} \\ &= f_0 \frac{\cos\theta}{\cos\theta n\cdot\cos(\theta n+\theta)} \\ &= f_0 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(-\frac{\sin\theta n}{\cos\theta n} + \frac{\sin(\theta n+\theta)}{\cos(\theta n+\theta)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_n &= z_0 + \sum_{l=0}^{n-1} f_l \\ &= z_0 + \sum_{l=0}^{n-1} f_0 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(-\frac{\sin\theta l}{\cos\theta l} + \frac{\sin(\theta l+\theta)}{\cos(\theta l+\theta)}\right) \\ &= z_0 + f_0 \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\sin\theta n}{\cos\theta n} \end{aligned}$$

よって $f_0 = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $z_0 = 0$ ととると，$z_n = \dfrac{\sin\theta n}{\cos\theta n}$ であり，したがって $y_n = \sin\theta n$ を得る。

演習問題 10. $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$, $y_3 = \frac{1}{3}$, $y_4 = -\frac{1}{4}$, $\cdots$ より $y_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ と推定する。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= (n+3)(n+2)(-1)^{n+3}\frac{1}{n+2} \\ &\qquad +(n+2)(n+1)(-1)^{n+2}\frac{1}{n+1} - n(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \\ &= (-1)^n\{-(n+3)+(n+2)+1\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから，推定した y_n は与差分方程式の解である。

$$y_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \qquad (n \geq 1)$$

演習問題 11.　a $y_0 = -1$, $y_1 = 2$, $y_2 = -3$, $y_3 = 4$, $y_4 = -5$, $\cdots$ より $y_n = (-1)^{n+1}(n+1)$ と推定する。

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (-1)^{n+3}(n+3) + (-1)^{n+2}(n+2) - (-1)^{n+1} \\ &= (-1)^n\{-(n+3) + (n+2) + 1\} \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから，推定した y_n は与差分方程式の解である。

$$y_n = (-1)^{n+1}(n+1) \qquad (n \geq 0)$$

b $y_n = z_n \cdot (-1)^{n+1}(n+1)$ とおく。$y_0 = 1$, $y_1 = 1$ より $z_0 = -1$, $z_1 = \frac{1}{2}$。
与式に代入して，

$$(n+3)z_{n+2} - (n+2)z_{n+1} - z_n = 0$$

$$z_{n+2} - z_{n+1} = -\frac{1}{n+3}(z_{n+1} - z_n)$$

ここで $f_n = z_{n+1} - z_n$, $f_0 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2}$ とおくと，

$$f_{n+1} = -\frac{1}{n+3}f_n$$

$$f_n = \prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{k+3}\right)f_0 = 3(-1)^n\frac{1}{(n+2)!}$$

よって

$$z_n = z_0 + \sum_{l=0}^{n-1} f_l = -1 + 3\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{1}{(l+2)!}$$

ゆえに

$$y_n = (-1)^n(n+1) + 3(n+1)\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^{l+n+1}\frac{1}{(l+2)!} \qquad (n \geq 0)$$

演習問題 12.　1. 母関数を

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} f_n x^n$$

とする。与式より

$$\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n)x^n = 0$$

であり，また

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^n = x^{-1}(G(x) - f_0) = x^{-1}(G(x) - 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}x^n = x^{-2}(G(x) - f_0 - f_1x) = x^{-2}(G(x) - 1 - x)$$

であるから，これらを代入して

$$x^{-2}(G(x) - 1 - x) - 5x^{-1}(G(x) - 1) + 6G(x) = 0$$

$$G(x) = \frac{1-4x}{6x^2 - 5x + 1} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-3x}$$

$G(x)$ の各項を展開すれば

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2 \cdot 2^n - 3^n)x^n$$

であるから，

$$f_n = 2^{n+1} - 3^n \qquad (n \geq 0)$$

【別解】 指数型母関数を

$$H(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n x^n}{n!}$$

とする。与式より

$$\sum_{n=0}^{\infty}(f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n)\frac{x^n}{n!} = 0$$

であり，また

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx}(H(x) - f_0) = \frac{d}{dx}H(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}\frac{x^n}{n!} = \frac{d^2}{dx^2}(H(x) - f_0 - f_1x) = \frac{d^2}{dx^2}H(x)$$

であるから，これらを代入して

$$\frac{d^2}{dx^2}H(x) - 5\frac{d}{dx}H(x) + 6H(x) = 0$$

$$H(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$$

である。初期値より

$$H(x)|_{x=0} = f_0 = 1$$

$$\frac{dH(x)}{dx}|_{x=0} = f_1 = 1$$

であるから，

$$H(x) = 2e^{2x} - e^{3x}$$

で，各項を展開すると

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 \cdot 2^n - 3^n)x^n}{n!}$$

であるから，

$$f_n = 2^{n+1} - 3^n \qquad (n \geq 0)$$

2. 母関数を

$$G(x) = \sum_{n \geq 0} f_n x^n$$

とする。与式より

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+2} - 5f_{n+1} + 6f_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$$

であり，また

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^n = x^{-1}(G(x) - f_0) = x^{-1}G(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}x^n = x^{-2}(G(x) - f_0 - f_1 x) = x^{-2}(G(x) - x)$$

であるから，これらを代入して

$$x^{-2}(G(x) - x) - 5x^{-1}G(x) + 6G(x) = \frac{1}{1-4x}$$

$$G(x) = \frac{3x^2 - x}{(6x^2 - 5x + 1)(1 - 4x)}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{1-2x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-4x}$$

$G(x)$ の各項を展開すれば

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}2^n + \frac{1}{2}4^n\right) x^n$$

であるから，

$$f_n = \frac{-2^n + 4^n}{2} \qquad (n \geq 0)$$

演習問題 13. 母関数を

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n, \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$$

とする。与式より

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2f_n + g_n) z^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n + 2g_n) z^n$$

であり，また

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n+1} z^n = z^{-1}(F(z) - f_1 z) = z^{-1}(F(z) - z)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_{n+1} z^n = z^{-1}(G(z) - g_1 z) = z^{-1}(G(z) - 2z)$$

であるから，これらを代入して

$$F(z) - z = 2zF(z) + zG(z)$$
$$G(z) - 2z = zF(z) + 2zG(z)$$

を得る。両式から $G(z)$ を消去して

$$F(z) = \frac{z}{3z^2 - 4z + 1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-3z} = \left(-\frac{1}{2}1^n + \frac{1}{2}3^n\right) z^n$$

であるから，

$$f_n = \frac{3^n - 1}{2} \qquad (n \geq 1)$$

となる。同様に，

$$G(z) = \frac{3z^2 - 2z}{3z^2 - 4z + 1} = -1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}1^n + \frac{1}{2}3^n\right)$$

であるから，

$$g_n = \frac{3^n + 1}{2} \qquad (n \geq 1)$$

演習問題 14. 1. 指数型母関数を

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}$$

とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\frac{x^n}{n!} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{x^n}{n!} - f_0\right)$$

$$= \frac{d}{dx}H(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} nf_{n-1}\frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{(n-1)!}x^{n-1}\right)x$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{n!}x^n\right)x$$

$$= xH(x)$$

与式より

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(f_n\frac{x^n}{n!} + nf_{n-1}\frac{x^n}{n!}\right)$$

であるから，

$$\frac{d}{dx}H(x) = H(x) + xH(x) = (1+x)H(x)$$

$$H(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)$$

ここで，$H(0) = 1$ より，$C = 0$ である。

$$H(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2} + x\right)$$

2. 指数型母関数を

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\frac{x^n}{n!}$$

とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{x^n}{n!} = H(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}\frac{x^n}{n!} - \delta_{n,1}\frac{x^n}{n!}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} B_{n-k} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=k}^{\infty} \delta_{n,1} \frac{x^n}{n!} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} x^{n-k} \right\} - x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{z^k}{k!} H(x) \right\} - x$$

$$= \exp(x) H(x) - x$$

よって

$$H(x) = \exp(x) H(x) - x$$

$$H(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1}$$

演習問題 15. 1.

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$$

の両辺に x^k をかけて，$0 \leq k \leq \infty$ の和をとる。

$$(\text{左辺}) = \sum_{k=0}^{\infty} F(x) x^k = \frac{F(x)}{1-x}$$

$$(\text{右辺}) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+k} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} f_n x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} f_k x$$

2.

$$(\text{左辺}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_k}{k!} x^k$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} (-1)^n \frac{f_k}{n!k!} x^{n+k}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} (-1)^{m-k} \frac{f_k}{(m-k)!k!} x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{1}{m!} f_k x^m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Delta^m f_0 x^m}{m!}$$

3.

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \frac{1}{(1+x)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{n+k}{k}(-1)^k x^k \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} f_n \tbinom{n+k}{k}(-1)^k x^{n+k} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} f_n \tbinom{m}{m-n}(-1)^{m-n} x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} f_n \tbinom{m}{m-n}(-1)^{m-n} x^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^m f_0 x^m
\end{aligned}
$$

演習問題 16.　1. 指数型母関数を

$$
H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}
$$

とする。

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n f_{n-1}}{n!} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} = xH(x)
$$

であるから，与式より

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f_n}{n!} x^n - \frac{n f_{n-1}}{n!} x^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \\
H(x) - xH(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \\
H(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{b_n}{n!} \frac{x^n}{1-x} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n+k=l} \frac{b_n}{n!} x^{n+k} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{b_m}{m!} x^l
\end{aligned}
$$

ゆえに,

$$f_n = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{b_m}{m!} \qquad (n \geq 0)$$

2. 指数型母関数を

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!}$$

とする。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{n+1}}{n!} x^n &= \frac{d}{dx} (H(x) - f_0) \\
&= \frac{d}{dx} H(x) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n f_n}{n!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{(n-1)!} x^n \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} \right) \\
&= x \frac{d}{dx} H(x) \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n f_{n-1}}{n!} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= x H(x)
\end{aligned}$$

よって与式より

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n f_n}{n!} x^n + \frac{n f_{n-1}}{n!} x^n \right)$$

$$\frac{d}{dx} H(x) = x \frac{d}{dx} H(x) + x H(x)$$

$$\frac{d}{dx} H(x) = \frac{x}{1-x} H(x)$$

$$H(x) = \frac{\exp(-x)}{1-x}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \sum_{l=0}^{\infty} x^l$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+l}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} x^m$$

ゆえに,

$$f_n = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \qquad (n \geq 0)$$

演習問題 17. f_n^m の指数型母関数を

$$H^m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^m z^n \qquad (m \geq 0)$$

とする。ここで, $f_n^m = 0, n < 0, m \geq 0$ を仮定する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n-1}^{m+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z f_{n-1}^{m+1} z^{n-1} = zH^{m+1}(z)$$

であるから, 与式より

$$H^{m+1}(z) - H^m(z) = \delta z H^{m+1}(z)$$

$$H^{m+1}(z) = \frac{1}{1-\delta z} H^m(z)$$

$H^0(z) = 1$ より,

$$H^m(z) = \frac{1}{(1-\delta z)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} (\delta z)^n$$

ゆえに

$$f_n^m = \binom{m+n-1}{n} \delta^n$$

である。これは, 2 項係数の性質から仮定 $f_n^m = 0, n < 0, m \geq 0$ を満たしている。

演習問題 18. m, n が小さいときの f_n^m の値から,

$$f_n^m = \binom{m}{n} \prod_{k=1}^{n} q_k$$

と解を予想できる。

$m=0$ のとき，

$$f_n^0 = \binom{0}{n} \prod_{k=1}^{n} q_k = \delta_{n,0}$$

であるから，式は成り立つ。
$m=m_1$ のとき，任意の整数 n に対し

$$f_n^{m_1} = \binom{m_1}{n} \prod_{k=1}^{n} q_k$$

が成り立つと仮定する。
$m=m_1+1$ のとき，

$$\begin{aligned} f_n^{m_1+1} &= f_n^{m_1} + q_n f_{n-1}^{m_1} \\ &= \binom{m_1}{n} \prod_{k=1}^{n} q_k + q_n \binom{m_1}{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} q_k \\ &= \left\{ \binom{m_1}{n} + \binom{m_1}{n-1} \right\} \prod_{k=1}^{n} q_k \\ &= \binom{m_1+1}{n} \prod_{k=1}^{n} q_k \end{aligned}$$

であるから，式は成り立つ。よって数学的帰納法により，任意の整数 n に対し，すべての自然数 m について

$$f_n^m = \binom{m}{n} \prod_{k=1}^{n} q_k$$

である。

(鈴森 康弘)

参考文献

差分に関する参考文献は非常に少ない。このテキストを書くときに参考にしたのは次の本である。

洋書

1. G. Boole, D.C.L., *Calculus of Finites Differences.* Chelsea 1970. 初版は 1860 年.
2. C. Jordan,*Calculus of Finites Differences.* Chelsea 1965. 初版は 1939 年.
3. R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik,*Concrete Mathematics.* Addison-Wesley 1994.

和書

1. 山本哲朗 **数値解析入門**　サイエンス社 1976 年
2. 丸山哲朗 **差分方程式序説**　現代数学社 1981 年
3. 矢島信男 **常微分方程式**　岩波書店 1989 年

翻訳書

1. Graham,Knuth,Patashnik 著，有澤誠・安村通晃・萩野達也・石畑清訳　**コンピュータの数学**　共立出版 1993 年
2. リチャード・スタンレイ著，成嶋弘・山田浩・渡辺敬一・清水昭信訳　**数え上げ組合わせ論**　日本評論社 1990 年
3. ロベルト　ヴィーフ著，富久泰明　監訳・松下電工（株）訳　**電子/制御/システム工学のための Z 変換の理論と応用**　ブレイン図書社発行・丸善発売 1991 年

あとがき

1990 年代における差分学の発展はめざましい。

1. 非線形微分方程式のパンルベ性 (動く危点 singular point をもたない) が非線形差分方程式に拡張され，差分空間におけるパンルベ性が「危点の閉じ込め」という概念に置き換えられ，この概念を指導原理 working rule として差分空間におけるパンルベ方程式が続々と発見されている。

2. ソリトン理論の出発点となった KdV 方程式を時間・空間ともに差分化したものは， KdV 差分方程式 とよばれているが，この KdV 差分方程式は数値計算法で数列の収束を加速する ϵ– アルゴリズムに一致することが発見された。

3. ソリトン理論の基礎的な方程式の一つである 戸田方程式が固有値を計算する Q-R 法に関係していることが発見され，その後，時間を差分化した戸田方程式は固有値計算法の一つである L-R 法に一致することが発見された。

4. 連続空間における sine-Gordon 方程式は微分幾何学の概念を使って表現されるが，差分空間における sine-Gordon 方程式は差分幾何学の概念で表現されることが発見され，差分幾何学発展の発端になった。

5. 独立変数を差分化するだけでなく従属変数までを差分化 (量子化) する非常に一般的な方法 (超差分化法) が発見された。超差分方程式は，元の方程式の定性的性質を非常によく保存している。超差分化によってソリトンの衝突が，小学生にも正確に計算できるようになった。

これらの新しい発展を目の前にして差分学の重要性をあらためて痛感している。差分学の新展開を理解し，さらに差分学を進歩させるためには，どうしても基礎的勉強が必要である。このテキストを演習問題まで含めて勉強すると差分学の基礎はマスターしたことになる。

索　引

あ　行

か　行

さ　行

著者略歴

広田良吾
ひろた りょうご

1954年　九州大学理学部物理学科卒業
1956年　九州大学大学院理学研究科修士課程修了
1957年　同博士課程を中退，フルブライト交換留学生として米国に留学
1961年　ノースウエスタン大学大学院博士課程修了，Ph.D
　　　　RCA基礎研究所，立命館大学理工学部，広島大学工学部をへて
現　在　早稲田大学理工学部情報学科教授

主要著書
無限・カオス・ゆらぎ（共著，培風館）
REDUCE入門（共著，サイエンス社）
直接法によるソリトンの数理（著，岩波書店）

1998年2月20日　初版発行

情報数理シリーズ A−2
差分学入門
情報化時代の微積分学

著　者　広田良吾
発行者　山本　格

発行所　株式会社　培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03)3262-5256（代表）・振替00140-7-44725

平文社印刷・三水舎製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN4-563-01482-6 C3355